T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004
Harjoitus 1, 22.9.

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt generoivien funktioiden avulla:

   (a)
   $$\begin{cases} a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geq 2; \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \\ b_n = 4b_{n-1} - 5b_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

2. Olkoon $\langle a_k \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ reaalilukujono ja $a(x)$ sen reaalinen generoiva funktio (so. pidetään tässä myös muuttujaa x reaaliarvoisena). Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ suppenee jossakin origon ympäristössä. Minkä lukujonojen generoivia funktioita ovat tällöin samassa origon ympäristössä määritellyt funktiot $a'(x)$ ja $\int_0^x a(t)\,dt$? Määritä tämän perusteella jonojen $\langle 0, 1, 2, \ldots \rangle$ ja $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \rangle$ (reaaliset) generoivat funktiot.

3. Ns. *toisen lajin Stirlingin luku* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ilmaisee, monellako tavalla n alkion perusjoukko voidaan osittaa k epätyhjään luokkaan. (Ks. kurssi "Diskreetin matematiikan perusteet".) Luvut toteuttavat rekursioyhtälön
   $$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}, \quad \text{kun } (n,k) \neq (0,0); \qquad \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1.$$
   Muodosta tämän yhtälön avulla generoiva funktio $S_k(z)$ jonolle $\langle s_n \rangle$, missä $s_n = \left\{ {n \atop k} \right\}$ (so. Stirlingin luvut annetulla kiinteällä k:n arvolla). Johda edelleen funktiosta $S_k(z)$ jokin arvio Stirlingin lukujen $\left\{ {n \atop k} \right\}$ kasvunopeudelle n:n suhteen.