

T-79.148 Tietojenkäsittelyteorian perusteet

Harri Haanpää

Tietojenkäsittelyteorian laboratorio, TTK

Kevät 2004

- Luento 0: Aiheen esittely ja kurssin käynnöt
- Luento 1: Matemaattisia peruskäsitteitä
- Luento 2: Merkkijonot ja kielet; numeroituvat ja ylinum. joukot
- Luento 3: Äärelliset automaattit
- Luento 4: ÄÄ:n minimointi; epädeterministiset ÄÄ:t
- Luento 5: Säännölliset lausekkeet ja äärelliset automaattit
- Luento 6: Säänn. kielten pumppauslemma; yhteydett. kieliopit
- Luento 7: Jäsennyspuut; LL(1)-kielioppien jäsenitys
- Luento 8: Chomskyn normaaliuoto; CYK-algoritmi; pinoautom
- Luento 9: Yhteydett. kielten pumppauslemma; Turingin koneet
- Luento 10: Turingin koneen laajennuksia
- Luento 11: Kieliluokat R ja RE; universaalinen Turingin kone
- Luento 12: Pysähtymisongelma; ratkeamattomuus; Ricen lause

T-79.148 Tietojenkäsittelyteorian perusteet Introduction to Theoretical Computer Science

What can one do with a computer?

This course divides roughly into three parts. We examine three models of a computer, their power and limitations, i.e., the classes of languages that they can decide.

It turns out that each class of automata corresponds to a class of grammars. The classes of automata and grammars are:

1. **Finite state automata** & **regular expressions**
2. **Pushdown automata** & **context-free grammars**
3. **Turing machine** & **unrestricted grammars**

Formal methods are used to *study* the models and in the exercises the knowledge is *applied*.

Practical arrangements

Registration: obligatory, by TOPI

Lectures: Thu 14–16 T1, in Finnish by Harri Haanpää

Exercises: Tue 12–13, Tue 13–14, Tue 16–17 in English,
Tue 17–18, Wed 12–13, Wed 13–14, Wed 14–15,
Wed 15–16, Wed 16–17, Wed 17–18 — choose
one and register by TOPI

Computer exercises: obligatory, using a WWW-based system

Course home page:

<http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.148/>

Course newsgroup: opinnot.tik.tkt@news.tky.hut.fi

- ▶ Please ask (and answer!) your questions there!

To pass the course

1. Pass the computer exercises before taking the exam.
2. After passing the computer exercises pass the exam by scoring at least 30/60 (exams likely in May, Aug, Oct, Dec, Feb)
 - ▶ You may earn up to 6 points on the exam by participating in the exercises.
 - ▶ 3 homework problems a week, 1 exam point for every 5 homework problems prepared for exercise session
 - ▶ You may earn 2 points for the exam by finishing the computer exercises quickly.

Material

Lecture notes (in Finnish) and solutions of *demonstration* exercises (in Finnish) are distributed through Edita.

Recommended textbook Michael Sipser, Introduction to the Theory of Computation, PWS Publishing 1997. (supplementary for Finnish-speaking students; likely necessary for non-Finnish-speaking students)

Some additional material on the course [WWW](#) page.

Feedback

I hope a group of students would give regular feedback during the course. Ideally, I hope for feedback from both those who attend lectures and those who do not.

- ▶ What was easy? What was difficult?
- ▶ How much effort does the course require?
- ▶ Does the course communication work?
- ▶ Other?

Interested students should send e-mail to Harri.Haanpaa@hut.fi soon.

TIETOJENKÄSITTELYTEORIA

- ▶ Matemaattinen oppi siitä, mitä tietokoneella on mahdollista tehdä ja kuinka tehokkaasti.
- ▶ Tarjoaa matemaattisia käsitteitä ja menetelmiä tietojenkäsittelyjärjestelmien mallintamiseen ja analysointiin sekä selkeiden ja tehokkaiden ratkaisujen laatimiseen.

Tietojenkäsittelyteorian osa-aloja

Laskettavuusteoria

Mitä tietokoneella voi tehdä periaatteessa?

- ▶ Turing, Gödel, Church, Post (1930-luku); Kleene, Markov (1950-luku).

Laskennan vaativuusteoria

Mitä tietokoneella voi tehdä käytännössä?

- ▶ Hartmanis, Stearns (1960-luku); Cook, Levin, Karp (1970-luku); Papadimitriou, Sipser, Håstad, Razborov ym. (1980-).

Automaatti- ja kielioppioteoria

Tietojenkäsittelyjärjestelmien perustyyppien ominaisuudet ja kuvausformalismit.

- ▶ Chomsky (1950-luku); Ginsburg, Greibach, Rabin, Salomaa, Schützenberger ym. (1960-luku)

Ohjelmien oikeellisuus

Tietojenkäsittelyjärjestelmien matemaattisesti eksakti määrittely ja oikean toiminnan verifiointi.

- ▶ Dijkstra, Hoare (1960-luku); Manna, Pnueli, Scott ym. (1970-).

Muuta

- ▶ algoritmien suunnittelu ja analyysi (Knuth, Hopcroft, Tarjan ym.)
- ▶ kryptologia (Rivest, Shamir, Adleman ym.)
- ▶ rinnakkaisten ja hajautettujen järjestelmien teoria (Lampport, Lynch, Milner, Valiant ym.)
- ▶ koneoppimisteoria (Valiant ym.)
- ▶ jne.

Tällä kurssilla käsitellään lähinnä automaatteja ja kielioppeja sekä hieman laskettavuusteorian alkeita. Muita aiheita käsitellään Tietojenkäsittelyteorian laboratorion muilla kursseilla.

1. Matemaattisia peruskäsitteitä

1.1 Joukot

Joukko (engl. set) on kokoelma alkiota. Alkiot voidaan ilmoittaa joko luettelomalla, esim.

$$S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

tai jonkin säännön avulla, esim.

$$S = \{p \mid p \text{ on alkuluku, } 2 \leq p \leq 20\}.$$

Jos alkiio a kuuluu joukkoon A , merkitään $a \in A$, päinvastaisessa tapauksessa $a \notin A$. (Esim. $3 \in S$, $8 \notin S$.)

Tärkeä erikoistapaus on *tyhjä joukko* (engl. empty set) \emptyset , johon ei kuulu yhtään alkiota.

Jos joukon A kaikki alkiot kuuluvat myös joukkoon B , sanotaan että A on B :n *osajoukko* (engl. subset) ja merkitään $A \subseteq B$. [Kirjallisuudessa esiintyy myös merkintä $A \subset B$.] Jos A ei ole B :n osajoukko merkitään $A \not\subseteq B$. Siis esim.

$$\{2, 3\} \subseteq S, \quad \{1, 2, 3\} \not\subseteq S.$$

Triviaalisti on voimassa $\emptyset \subseteq A$ kaikilla A .

Joukot A ja B ovat samat, jos niissä on samat alkiot, so. jos on $A \subseteq B$ ja $B \subseteq A$. Jos on $A \subseteq B$, mutta $A \neq B$, sanotaan että A on B :n *aito osajoukko* (engl. proper subset) ja merkitään $A \subsetneq B$. Edellä olisi siis voitu myös kirjoittaa $\{2, 3\} \subsetneq S$ ja $\emptyset \subsetneq A$ jos $A \neq \emptyset$.

Joukon alkioina voi olla myös toisia joukkoja (tällöin puhutaan usein "joukkoperheestä"), esim.

$$X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Jonkin perusjoukon A kaikkien osajoukkojen muodostamaa joukkoperhettä sanotaan A :n *potenssijoukoksi* (engl. powerset) ja merkitään $\mathcal{P}(A)$:lla; esim. edellä on $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$. [Koska n -alkioisen perusjoukon A potenssijoukossa on 2^n alkioita (HT), käytetään kirjallisuudessa potenssijoukolle myös merkintää 2^A .]

Huomaa, että $A \subseteq B$ jos ja vain jos $A \in \mathcal{P}(B)$.

Tyhjän joukon käsittelyssä pitää olla huolellinen:

$$\emptyset \neq \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \quad \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Joukkoja voidaan kombinoida *joukko-operaatioilla*, joista tärkeimmät ovat:

yhdiste (engl. union)

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\},$$

esim. $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

leikkaus (engl. intersection)

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\},$$

esim. $\{1, 2, 3\} \cap \{1, 4\} = \{1\}$.

erotus (engl. difference)

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\},$$

esim. $\{1, 2, 3\} - \{1, 4\} = \{2, 3\}$.

[Erotukselle käytetään myös merkintää $A \setminus B$.]

Joukko-operaatioita koskevat tietyt laskulait, joista tärkeimmät ovat yhdisteen ja leikkauksen *liitännäisyys*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ja *vaihdannaisuus*:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

sekä näiden *osittelulait*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Jos kaikki tarkasteltavat joukot ovat jonkin yhteisen "universaalijoukon" U osajoukkoja, sanotaan erotusta $U - A$ joukon A *komplementiksi* (U :n suhteen) ja merkitään \bar{A} :lla.

Yhdiste-, leikkaus- ja komplementointioperaatioita yhdistävät tärkeät ns. *de Morganin* kaavat:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Lisäksi joukkojen erotus voidaan esittää leikkauksen ja komplementoinnin avulla seuraavasti:

$$A - B = A \cap \bar{B}.$$

Jos joukkoperheen \mathcal{A} jäsenet on *indeksoitu*, esim.

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\},$$

niin yhdisteelle ja leikkaukselle voidaan käyttää lyhennemerkintöjä

$$\bigcup_{i \geq 1} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i \geq 1} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots$$

Indeksien ei tarvitse olla edes luonnollisia lukuja, vaan *indeksijoukkona* voi olla mikä tahansa joukko I . Tällöin käytetään merkintöjä

$$\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$$

ja

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{i \in I} A_i$$

1.2 Relaatiot ja funktiot

Olkoot A ja B joukkoja. Alkioiden $a \in A$ ja $b \in B$ järjestettyä *paria* (engl. ordered pair) merkitään (a, b) . Huomaa, että joukkoina on aina $\{a, b\} = \{b, a\}$, mutta jos $a \neq b$, niin järjestettyinä pareina on $(a, b) \neq (b, a)$.

Joukkojen A ja B *karteesian tulo* (engl. Cartesian product) määritellään

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ ja } b \in B\},$$

esim.

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 3\} \times \{1, 4\} \\ &= \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}. \end{aligned}$$

Relaatio R joukolta A joukolle B on karteesian tulon $A \times B$ osajoukko:

$$R \subseteq A \times B.$$

Jos $(a, b) \in R$, niin merkitään myös aRb ja sanotaan että alkio a on *relaatiossa* (*suhteessa*) R alkioon b . Tätä *infix*-merkintää käytetään varsinkin silloin, kun relaation nimenä on jokin erikoismerkki, esim. $\leq, <, \equiv, \sim$. [Onhan luontevampaa kirjoittaa " $a < b$ " kuin " $(a, b) \in <$ ".] Jos relaation R *lähtöjoukko* (engl. domain) A ja *maalijoukko* (engl. range) B ovat samat, so. $R \subseteq A \times A$, sanotaan että R on *relaatio joukossa A* .

Olkoon $R \subseteq A \times B$. Osajoukon $A' \subseteq A$ kuva (engl. image) relaatiossa R on

$$R(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ s.e. } (a', b) \in R\}$$

ja osajoukon $B' \subseteq B$ *alkukuva* (engl. inverse image) on

$$R^{-1}(B') = \{a \in A \mid \exists b' \in B' \text{ s.e. } (a, b') \in R\}.$$

Relaation $R \subseteq A \times B$ *käänteisrelaatio* (engl. inverse relation) on relaatio $R^{-1} \subseteq B \times A$,

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Jos $R \subseteq A \times B$ ja $S \subseteq B \times C$ ovat relaatioita, niin niiden *yhdistetty relaatio* (engl. composite relation) $R \circ S \subseteq A \times C$ määritellään:

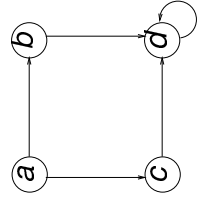
$$R \circ S = \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{ s.e. } (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Varsinkin jos joukot A ja B ovat äärellisiä, relaatiota $R \subseteq A \times B$ voi olla havainnollista tarkastella *suunnattuna verkkona t. graafina*, jonka *solmuina* ovat joukkojen A ja B alkiot ja *solmusta* $a \in A$ on *kaarri* ("nuoli") solmuun $b \in B$, jos ja vain jos $(a, b) \in R$.

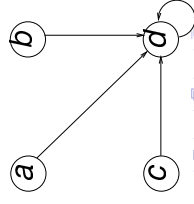
Olkoon esimerkiksi joukossa $A = \{a, b, c, d\}$ määritetty relaatio $R \subseteq A \times A$,

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (d, d)\}.$$

Relaation R graafiesitys on



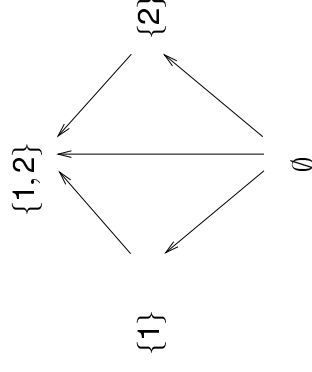
Relaation $R \circ R$ graafiesitys puolestaan on



Olkoon toisena esimerkkinä joukossa $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ määritetty relaatio $S \subseteq X \times X$,

$$S = \{(A, B) \mid A \subseteq B\}.$$

Tämän graafiesitys on:



Relaatio $f \subseteq A \times B$ on *funktio*, jos kukin $a \in A$ on relaatiossa f täsmälleen yhden $b \in B$ kanssa. Tällöin käytetään yleisten relaatiomerkintöjen sijaan tavallisesti merkintöjä $f : A \rightarrow B$ ja $f(a) = b$. Funktioita koskee kaikki mitä edellä yleisesti on todettu relaatioista, mutta historiallisista syistä funktioiden yhdistäminen merkitään toisin päin kuin yleisten relaatioiden: jos $f : A \rightarrow B$ ja $g : B \rightarrow C$ ovat funktioita, niin niiden yhdistetty funktio määritellään kaavalla $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, so. relaatioina

$$g \circ f = \{(a, c) \mid \exists b \in B \text{ s.e. } f(a) = b, g(b) = c\}.$$

Funktio $f : A \rightarrow B$ on *surjektio* (engl. onto map), jos jokainen $b \in B$ on jonkin $a \in A$ kuva, so. jos $f(A) = B$, ja *injektio* (engl. one-to-one map), jos kaikki $a \in A$ kuvautuvat eri alkioille, so. jos $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$. Funktio f on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio, so. jos jokainen $b \in B$ on yhden ja vain yhden $a \in A$ kuva.

1.3 Ekvivalenssirelaatiot

Ekvivalenssirelaatiot ovat matemaattisesti täsmällinen muotoilu sille yleiselle idealle, että oliot ovat keskenään *samankaltaisia* jonkin kiinnostavan ominaisuuden X suhteen. Ominaisuuteen X perustuva ekvivalenssirelaatio osittaa tarkasteltavien olioiden joukon *ekvivalenssiluokkiin*, jotka vastaavat ominaisuuden X eri arvoja. (Kääntäen mielivaltainen olioiden joukon ositus Π määrää tietyin abstraktin samankaltaisuusominaisuuden, nim. sen että oliot ovat samankaltaisia jos ne sijoittuvat samaan osituksen Π luokkaan.)

Osoittautuu, että yleinen "samankaltaisuusrelaation" idea voidaan kiteyttää seuraaviin kolmeen ominaisuuteen.

Määritelmä 1.1 Relaatio $R \subseteq A \times A$ on

1. *refleksiivinen*, jos $aRa \forall a \in A$;
2. *symmetrinen*, jos $aRb \Rightarrow bRa \forall a, b \in A$;
3. *transitiivinen*, jos $aRb, bRc \Rightarrow aRc \forall a, b, c \in A$.

Määritelmä 1.2 Relaatio $R \subseteq A \times A$, joka toteuttaa edelliset ehdot 1–3 on *ekvivalenssirelaatio*. Alkion $a \in A$ *ekvivalenssiluokka* (relaation R suhteen) on

$$R[a] = \{x \in A \mid aRx\}.$$

Ekvivalenssirelaatioita merkitään usein R :n sijaan alkioiden samankaltaisuutta korostavilla symboleilla \sim, \equiv, \simeq tms.

Esim. Olkoon

$$A = \{\text{kaikki 1900-luvulla syntyneet ihmiset}\}$$

ja aRb voimassa, jos henkilöillä a ja b on sama syntymävuosi. Tällöin R on selvästi ekvivalenssi, jonka ekvivalenssiluokat koostuvat keskenään samana vuonna syntyneistä henkilöistä. Luokkia on 100 kappaletta, ja “abstraktisti” ne vastaavat 1900-luvun vuosia 1900, ..., 1999.

Lemma 1.3 Olkoon $R \subseteq A \times A$ ekvivalenssi. Tällöin on kaikilla $a, b \in A$ voimassa:

$$R[a] = R[b] \quad \text{joss} \quad aRb.$$

Tod. Helppo; sivuutetaan. \square

Lemma 1.4 Olkoon $R \subseteq A \times A$ ekvivalenssi. Tällöin R :n ekvivalenssiluokat muodostavat A :n osituksen erillisiin epätyhjiin osajoukkoihin, so.:

- ▶ $R[a] \neq \emptyset$ kaikilla $a \in A$;
- ▶ $A = \bigcup_{a \in A} R[a]$;
- ▶ jos $R[a] \neq R[b]$, niin $R[a] \cap R[b] = \emptyset$, kaikilla $a, b \in A$.

Tod. Helppo; sivuutetaan. \square

Kääntäen jokainen perusjoukon A ositus erillisiin epätyhjiin luokkiin A_i , $i \in I$, määrää vastaavan ekvivalenssirelaation:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ ja } b \text{ kuuluvat samaan luokkaan } A_i.$$

*1.4 Järjestysrelaatiot

Kuten edellä samankaltaisuuden idea, voidaan moninaiset matematiikassa esiintyvät olioiden “järjestykset” kiteyttää seuraavasti:

Määritelmä 1.5 Relaatio $R \subseteq A \times A$ on *antisymmetrinen*, jos kaikilla $a, b \in A$ on voimassa: $aRb, bRa \Rightarrow a = b$.

Määritelmä 1.6 Relaatio $R \subseteq A \times A$, joka on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen, on joukon A (*osittainen*) *järjestys* (engl. (partial) order).

Järjestysrelaatioita merkitään usein R :n sijaan symboleilla \leq, \preceq tms.

Jos alkioilla $a, b \in A$ on voimassa aRb tai bRa , sanotaan että a ja b ovat *vertailtavia* (engl. comparable).

Jos kaikki perusjoukon A alkioit ovat (pareittain) vertailtavia, järjestys R on *täydellinen* (kokonainen, lineaarinen) (engl. complete, total, linear order).

Järjestetyn joukon (A, \preceq) alkio $a \in A$ on

- ▶ *maksimaalinen*, jos $a \preceq x \Rightarrow a = x \quad \forall x \in A$;
- ▶ *mimimaalinen*, jos $x \preceq a \Rightarrow a = x \quad \forall x \in A$;
- ▶ *suurin alkio*, jos $x \preceq a \quad \forall x \in A$;
- ▶ *pienin alkio*, jos $a \preceq x \quad \forall x \in A$.

Järjestetty joukko (A, \preceq) on *hyvin järjestetty* (engl. well-ordered), jos jokainen epätyhjä $B \subseteq A$ sisältää järjestyksen \preceq suhteen pienimmän alkion.

Lemma. Jokainen hyvinjärjestys on täydellinen. \square

Esimerkkejä.

- ▶ (\mathbb{N}, \leq) — hyvinjärjestys.
- ▶ (\mathbb{Z}, \leq) — täydellinen, mutta ei hyvinjärjestys.
- ▶ Olk. X mieliv. joukko. Tällöin $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on järjestetty joukko, mutta ei täydellinen järjestys jos $|X| \geq 2$.
- ▶ Olk. $m, n \in \mathbb{N}$. Merkitään:

$$m \mid n \Leftrightarrow m \text{ on } n\text{:n tekijä.}$$

Joukko (\mathbb{N}, \mid) on järjestys, mutta ei täydellinen.

Olkoon (A, \preceq) järjestetty joukko. Merkitään:

$$\begin{aligned} a \prec b &\Leftrightarrow a \preceq b, a \neq b \\ a \succeq b &\Leftrightarrow b \preceq a \\ a \succ b &\Leftrightarrow a \succeq b, a \neq b. \end{aligned}$$

Alkio $a \in A$ on alkion $b \in A$ *välitön edeltäjä* (ja b on a :n *välitön seuraaja*), jos

1. $a \prec b$ ja
2. $\nexists c \in A$ s.e. $a \prec c \prec b$.

Jokainen äärellinen järjestetty joukko (A, \preceq) voidaan esittää ns. *Hasse-kaaviona*, jonka solmut vastaavat A :n alkioita, ja solmusta $a \in A$ on viivat “ylöspäin” a :n kaikkiin välittömiin seuraajiin.

Järjestetty joukko (A, \preceq) on *hyvin järjestetty* (engl. well-ordered), jos jokainen epätyhjä $B \subseteq A$ sisältää järjestyksen \preceq suhteen pienimmän alkion.

Lemma. Jokainen hyvinjärjestys on täydellinen. \square

Esimerkkejä.

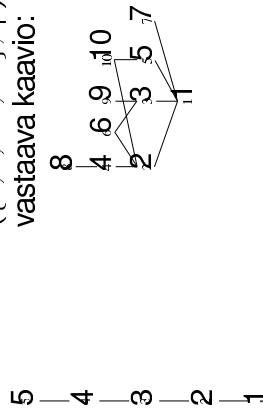
- ▶ (\mathbb{N}, \leq) — hyvinjärjestys.
- ▶ (\mathbb{Z}, \leq) — täydellinen, mutta ei hyvinjärjestys.
- ▶ Olk. X mieliv. joukko. Tällöin $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ on järjestetty joukko, mutta ei täydellinen järjestys jos $|X| \geq 2$.
- ▶ Olk. $m, n \in \mathbb{N}$. Merkitään:

$$m \mid n \Leftrightarrow m \text{ on } n\text{:n tekijä.}$$

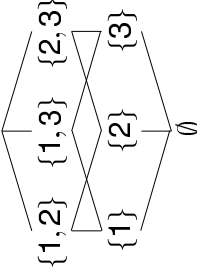
Joukko (\mathbb{N}, \mid) on järjestys, mutta ei täydellinen.

Esim.

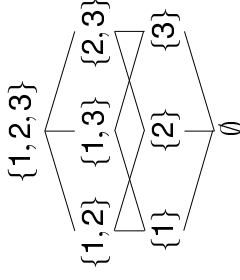
(i) Järjestystä $(\{1, 2, \dots, 5\}, \leq)$ vastaava kaavio:



(ii) Järjestystä $(\{1, 2, \dots, 10\}, \mid)$ vastaava kaavio:



(iii) Järjestystä $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$ vastaava kaavio:



Järjestyksrelaation Hasse-kaavio voidaan nähdä myös relaation graafiesityksen “transitiivisena reduktiona,” missä graafista on selkeyden vuoksi jätetty pois ne kaaret, joiden olemassaolo voidaan päätellä graafissa esitettyjen kaarten ja tarkasteltavan relaation refleksiivisyyden ja transitiivisuuden nojalla.

1.5 Induktioperiaate

Lause 1.7 Olkoon (A, \preceq) hyvin järjestetty joukko ja $P(a)$ jokin A :n alkioita koskeva väite. Jos voidaan osoittaa kaikilla $a \in A$ induktio-ominaisuus:

(*) $[P(x)$ tosi kaikilla $x \prec a] \Rightarrow P(a)$ tosi, niin väite $P(a)$ on tosi kaikilla $a \in A$.

Tod. Oletetaan, että ominaisuus (*) on voimassa, mutta silti joukko

$$B = \{a \in A \mid P(a) \text{ on epätosi}\}$$

on epätyhjä. Koska A on hyvin järjestetty, joukossa B on järjestyksen \preceq suhteen pienin alkio $b \in B$. Mutta tällöin on voimassa:

$$[P(x) \text{ tosi kaikilla } x \prec b],$$

joten oletuksen (*) mukaan pitäisi olla myös $P(b)$ tosi.

Saadusta ristiriidasta seuraa, että on oltava $B = \emptyset$, ja siis $P(a)$ tosi kaikilla $a \in A$. \square

Seuraus 1.8 [Luonnollisten lukujen vahva induktio.] Olkoon $P(k)$ jokin luonnollisten lukujen ominaisuus. Jos on voimassa:

1. $P(0)$ ja
2. kaikilla $k \geq 0$:

$$[P(0) \& P(1) \& \dots \& P(k)] \Rightarrow P(k+1),$$

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$. \square

Seuraus 1.9 [Luonnollisten lukujen heikko induktio.] Olkoon $P(k)$ jokin luonnollisten lukujen ominaisuus. Jos on voimassa:

1. $P(0)$ ja
 2. kaikilla $k \geq 0$:
- $$P(k) \Rightarrow P(k+1),$$

niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$. \square

Esimerkki.

Väite. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa kaava

$$P(n) : (1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Todistus.

1. Perustapaus: $P(0) : 0^2 = 0$.

(jatkuu)

2. Induktioaskel: Oletetaan, että annetulla $k \geq 0$ kaava

$$P(k) : (1 + 2 + \dots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3$$

on voimassa. Tällöin on myös:

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + \dots + k + (k+1))^2 \\ &= (1 + \dots + k)^2 + 2(1 + \dots + k)(k+1) + (k+1)^2 \\ &= 1^3 + \dots + k^3 + 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} \cdot (k+1) + (k+1)^2 \\ &= 1^3 + \dots + k^3 + k(k+1)^2 + (k+1)^2 \\ &= 1^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3. \end{aligned}$$

On siis todettu, että kaavan $P(k)$ totuudesta seuraa kaavan $P(k+1)$ totuus, so. että $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, kaikilla $k \geq 0$. Luonnollisten lukujen induktioperiaatteen 1.9 nojalla voidaan nyt päätellä, että kaava $P(n)$ on voimassa kaikilla $n \in \mathbb{N}$. \square