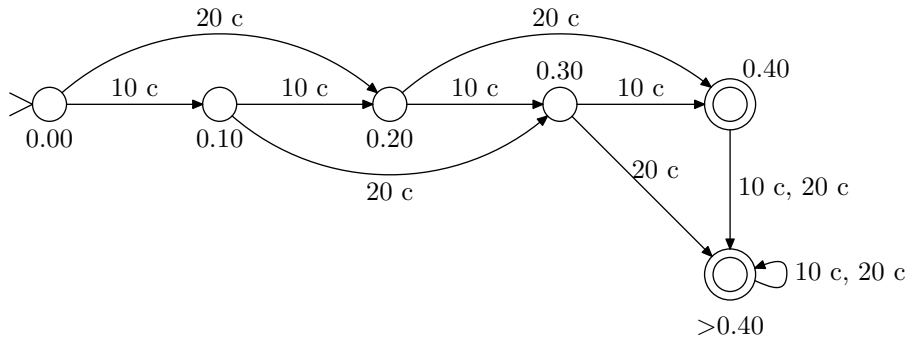


4. **Tehtävä:** Formuloi luennolla (monisteen s. 15) esitetty yksinkertainen kahviautomaatti täsmällisesti äärellisen automaatin tarkan määritelmän (määritelmä 2.1) mukaiseksi. Mikä on automaatin tunnistama kieli?

**Vastaus:** Tehtävässä piti antaa formaali esitys allaolevalle tilakoneelle:



Deterministinen tilakone (äärellinen automaatti)  $M$  on monikko:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

missä  $Q$  on äärellinen tilojen joukko,  $\Sigma$  äärellinen aakkosto,  $\delta$  siirtofunktio  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ ,  $q_0 \in Q$  alkutila ja  $F \subseteq Q$  hyväksyvien lopputilojen joukko.

Tehtävän koneessa monikon osat on määritelty seuraavasti<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} Q &= \{0.00, 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, >0.40\} \\ \Sigma &= \{10c, 20c\} \\ q_0 &= \{0.00\} \\ F &= \{0.40, >0.40\} \end{aligned}$$

Tilansiirtofunktio  $\delta$  on selvintä esittää taulukkona:

$q$	$\delta(q, 10c)$	$\delta(q, 20c)$
0.00	0.10	0.20
0.10	0.20	0.30
0.20	0.30	0.50
0.30	0.40	>0.40
0.40	>0.40	>0.40

Tilakoneen konfiguraatio  $c \in Q \times \Sigma^*$  muodostuu koneen tilasta ja syötteestä. Kone lukee syötettä merkki kerrallaan ja siirtyy aina siirtofunktion mukaisesti uuteen tilaan. Mikäli sanan loppuessa päädytään lopputilaan, sana hyväksytään. Muussa tapauksessa sana hylätään. Tilakoneen  $M$  hyväksymä kieli  $L(M)$  on kaikkien hyväksytyjen sanojen joukko. Tehtävän koneelle tämä on:

$$L(M) = \{x_1x_2 \cdots x_n \mid x_i \in \Sigma \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq n \text{ ja } \sum_{i=1}^n x_i \geq 40c\}$$

Kone siis hyväksyy kaikki jonot, joissa syötettyjen kolikoiden summa on 40 c tai enemmän. Tarkastellaan koneen toimintaa muutamalla syötteellä:

<sup>1</sup>Selvytyden vuoksi on tilojen nimissä olevat desimaalipilkut vaihdettu pisteiksi.

–  $w = 0.10c 0.10c 0.20c$ :

$$(0.00, 0.10c 0.10c 0.20c) \vdash_M (0.10, 0.10c 0.20c) \\ \vdash_M (0.20, 0.20c) \vdash_M (0.40, \varepsilon)$$

Koska  $0.40 \in F$ , sana hyväksytään. Tässä merkintä  $\vdash_M$  tarkoittaa sitä, että kone  $M$  suorittaa yhden askeleen.

–  $w = 0.20c 0.10c$ :

$$(0.00, 0.20c 0.10c) \vdash_M (0.20, 0.10c) \vdash_M (0.30, \varepsilon)$$

Koska  $0.30 \notin F$ , sana hylätään.

–  $w = 0.20c 0.20c 0.20c$ :

$$(0.00, 0.20c 0.20c 0.20c) \vdash_M^* (>0.40, \varepsilon)$$

Sana hyväksytään. Merkintä  $\vdash_M^*$  tarkoittaa, että kone  $M$  suorittaa nolla tai useampia askelia.

5. **Tehtävä:** Laadi äärelliset automaattit seuraavien kielten tunnistamiseen:

1.  $\{a^m b^n \mid m = n \pmod 3\}$ ;
2.  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää yhtä monta } a\text{:ta ja } b\text{:tä, modulo } 3\}$ .

(Merkintä “ $m = n \pmod 3$ ” tarkoittaa, että luvut  $m$  ja  $n$  antavat kolmella jaettaessa saman jakojäännöksen.)

**Vastaus:**

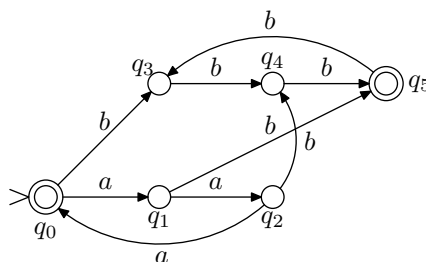
a) Kielen  $L = \{a^m b^n \mid m = n \pmod 3\}$  tunnistaa seuraava äärellinen automaatti:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \\ Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\} \\ \Sigma = \{a, b\} \\ F = \{q_0, q_5\}$$

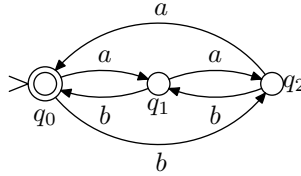
Tilansiirtofunktio  $\delta$  määritellään seuraavasti:

$q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
$q_0$	$q_1$	$q_3$
$q_1$	$q_2$	$q_5$
$q_2$	$q_0$	$q_4$
$q_3$	$q_6$	$q_4$
$q_4$	$q_6$	$q_5$
$q_5$	$q_6$	$q_3$
$q_6$	$q_6$	$q_6$

Tässä tilaa  $q_6$  käytetään hylkäystilana, johon siirrytään heti, kun on varmaa että sana ei voi enää kuulua kieleen (kun sanasta löytyy alijono  $ba$ ), ja jossa pysytään aina laskennan loppuun asti. Tällaiset tilat jätetään usein merkitsemättä, kun tilakone esitetään konekaaviona. Näin on tehty myös alla olevan kaavion tapauksessa:

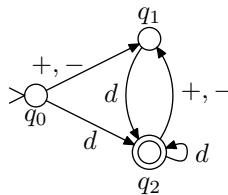


- b) Kielen  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ sisältää yhtä monta } a\text{- ja } b\text{-kirjainta modulo } 3\}$  tunnistaa seuraava tilakone:



6. **Tehtävä:** Laadi äärellinen automaatti, joka tunnistaa yhteen- ja vähennyslaskumerkein toisistaan erotettujen kokonaislukujen jonoja (esim.  $11 + 20 - 9, -5 + 8$ ). Toteuta automaattisi tietokoneohjelmana, joka myös laskee lukujonon arvon.

**Vastaus:** Kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslaskut voidaan tunnistaa seuraavalla automaatilla:



Tässä  $d$  on lyhennysmerkintä, joka tarkoittaa mitä tahansa numeroa joukosta  $\{0, \dots, 9\}$ . Automaatti voidaan toteuttaa varsin suoraviivaisesti millä tahansa proseduraalisella ohjelmointikielellä lisäämällä siihen summan laskenta ja virheellisen syötteen käsittely. Alla on esitetty C-kielinen toteutus:

```

#include <stdio.h>
#include <ctype.h>

int main (void)
{
    int q;    /* tila */
    int c;    /* syötemerkki */
    int sgn, val, sum; /* apumuuttujia */
    sgn=1; val = 0, sum = 0;
    q = 0;

    while ((c = getchar()) != '\n') {
        switch (q) {
            case 0:
                if (c == '+') q = 1;
                else if (c == '-') {
                    sgn = -1;
                    q = 1;
                }
                else if (isdigit(c)) {
                    val = c - '0';
                    q = 2;
                }
                else q = 99;
                break;

            case 1:
                if (isdigit(c)) {

```

```

        val = c - '0';
        q = 2;
    }
    else q = 99;
    break;

case 2:
    if (isdigit(c)) {
        val = 10 * val + (c - '0');
        q = 2;
    }
    else if (c == '+')
    {
        sum = sum + val*sgn;
        val = 0;
        sgn = 1;
        q = 1;
    }
    else if (c == '-')
    {
        sum = sum + val*sgn;
        val = 0;
        sgn = -1;
        q = 1;
    }
    else q = 99;
    break;

case 99:
    break;
}
}
sum = sum + sgn*val;
if (q == 2)
    printf("LUVUN ARVO ON %d.\n", sum);
else
    printf("VIRHEELLINEN LUKU.\n");
return;
}

```