T-79.148 **Kevät 2003**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 1, 20.–22.1.
Tehtävät

Kotitehtävät:

1. Olkoon perusjoukon $A = \{a, b, c, d\}$ relaatio $R \subseteq A \times A$ määritelty:

$$R = \{(a, b), (a, d), (b, d), (c, b), (c, d), (d, d)\}.$$

Piirrä seuraavien relaatioiden graafiesitykset:

(a) R, (b) R^{-1}, (c) $R \circ R$, (d) $R - (R \circ R)$.

Ovatko jotkin näistä relaatioista funktioita?

2. Todista oikeiksi annetun perusjoukon U osajoukkojen A ja B yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhdetta koskevat *de Morganin kaavat*:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

3. (a) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).
   (b) Piirrä kaikkien joukon $\{a, b, c\}$ järjestysrelaatioiden (osittainjärjestysten) Hasse-kaaviot tai graafiesitykset.

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.