

Tietojenkäsittelyteorian perusteet  
Harjoitus 8  
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä:** Laadi algoritmi, joka testaa onko annetun yhteydettömän kieliopin  $G = (V, \Sigma, P, S)$  tuottama kieli epätyhjä, so. voidaanko kieliopin lähtösymbolista  $S$  johtaa yhtään päätejonoa  $x \in \Sigma^*$ .

**Vastaus:** Allaoleva proseduuri `?GENERATESNONEMPTYLANGUAGE( $G$ )` ottaa syötteenä yhteydettömän kieliopin  $G$ , ja palauttaa arvon `true`, jos  $G$ :n generoima kieli ei ole tyhjä.

`?GENERATESNONEMPTYLANGUAGE( $G = (V, \Sigma, P, S)$ ): context-free grammar)`

```

T ← Σ
repeat |V - Σ| times
  for each A → X1 ··· Xk ∈ P
    if A ∉ T ∧ X1 ··· Xk ∈ Tk
      T ← T ∪ {A}
if S ∈ T
  return true
else
  return false

```

Algoritmin idea on lähteä terminaalisyönteiden joukosta  $\Sigma$  ja testata, onko näistä mahdollista perääntyä  $S$ :ään käyttäen joukon  $P$  produktioita käänteisesti. Perääntymistä simuloidaan iteroimalla  $|V - \Sigma|$  kertaa saavutettavien symbolien joukkoa  $T$ .

Perusteluksi sille, että  $|V - \Sigma|$  askelta riittää, tarkastellaan sanaa  $z \in L(G)$ , jolla on kielen sanoista kaikkein pienin jäsenyspuu. Jos  $z$ :lla on muotoa

$$S \rightarrow^* uAy \rightarrow^* uvAxy \rightarrow^* uvwxy$$

oleva johto, missä  $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ , niin myös sana  $z' = uwy$  voidaan johtaa kieliopin säännöillä<sup>1</sup>. Tällöin kuitenkin  $z'$ :n jäsenyspuu on pienempi kuin  $z$ :n jäsenyspuu, mikä on ristiriidassa sen oletuksen kanssa, että  $z$ :n puu on pienin. Tästä seuraa se, että missään  $z$ :n minimaalisen jäsenyspuun haaroissa ei voi esiintyä sama välike kahteen kertaan, joten algoritmissa riittää käydä sääntöjoukko läpi yhtä monta kertaa kuin kieliopissa on välikkeitä.

Tarkastellaan esimerkiksi kielioppia:

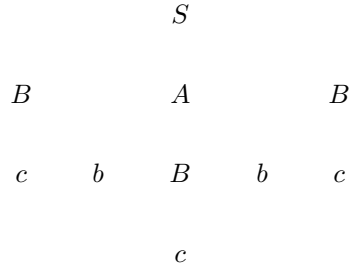
$$\begin{aligned}
S &\rightarrow BAB \mid ABA \\
A &\rightarrow aAS \mid bBa \\
B &\rightarrow bBS \mid c
\end{aligned}$$

Algoritmin laskenta etenee joukon  $T$  osalta seuraavasti:

$$\begin{aligned}
T_0 &= \{a, b, c\} \\
T_1 &= \{a, b, c, B\} && (B \rightarrow c) \\
T_2 &= \{a, b, c, A, B\} && (A \rightarrow bBa) \\
T_3 &= \{a, b, c, A, B, C\} && (S \rightarrow BAB, S \rightarrow ABA)
\end{aligned}$$

Koska  $|V - \Sigma| = 3$ , algoritmin suoritus päättyy ja  $T = T_3$ . Huomataan, että  $S \in T$ , joten kieli ei ole tyhjä. Pienin kieleen kuuluvan sanan jäsenyspuu on:

<sup>1</sup>Vertaa yhteydettömien kielten pumppauslemmaa.



5. **Tehtävä:** Muodosta kielioppia  $G = (V, \Sigma, P, S)$  vastaava pinoautomaatti, kun

$$\begin{aligned}
V &= \{S, (, ), *, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Sigma &= \{(, ), *, \cup, \emptyset, a, b\} \\
P &= \{S \rightarrow (SS), S \rightarrow S^*, S \rightarrow (S \cup S), \\
&\quad S \rightarrow \emptyset, S \rightarrow a, S \rightarrow b\}
\end{aligned}$$

**Vastaus:** Mitä tahansa yhteydetöntä kielioppia  $G = (V, \Sigma, R, S)$  vastaava epädeterministinen pinoautomaatti  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$  voidaan laatia seuraavasti:

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_{acc}\} \\
\Gamma &= V \cup \{\perp\} \\
F &= \{q_{acc}\} \\
\delta &= \{((q_0, \varepsilon, \varepsilon), (q_1, S\perp)), ((q_1, \perp, \varepsilon), (q_{acc}, \varepsilon))\} \tag{1}
\end{aligned}$$

$$\cup \{((q_1, \varepsilon, A), (q_1, \alpha)) \mid (A \rightarrow \alpha) \in P\} \tag{2}$$

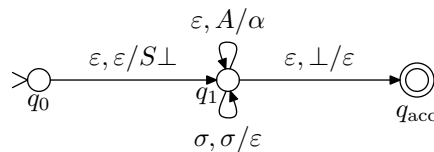
$$\cup \{((q_1, \sigma, \sigma), (q_1, e)) \mid \sigma \in \Sigma\} \tag{3}$$

Tässä symbolia  $\perp$  käytetään pinon pohjan merkinä.

Tehtävän kieliopille konstruktio tuottaa seuraavan pinoautomaatin:

$$\begin{aligned}
Q &= \{q_0, q_1, q_{acc}\} \\
\Sigma &= \{(, ), *, \cup, \emptyset, a, b\} \\
\Gamma &= \{S, (, ), *, \cup, \emptyset, a, b, \perp\} \\
F &= \{q_{acc}\} \\
\delta &= \{((q_0, e, e), (q_1, S\perp)), ((q_1, \perp, e), (q_{acc}, e)), ((q_1, e, S), (q_1, (SS))), \\
&\quad ((q_1, e, S), (q_1, S^*)), ((q_1, e, S), (q_1, (S \cup S))), ((q_1, e, S), (q_1, \emptyset)), \\
&\quad ((q_1, e, S), (q_1, a)), ((q_1, e, S), (q_1, b)), \\
&\quad ((q_1, (, (, (q_1, e))), ((q_1, (, ), (q_1, e))), ((q_1, *, *), (q_1, e)), \\
&\quad ((q_1, \cup, \cup), (q_1, e)), ((q_1, \emptyset, \emptyset), (q_1, e)), ((q_1, a, a), (q_1, e)), \\
&\quad ((q_1, b, b), (q_1, e))\}
\end{aligned}$$

Syntynyt automaatti on muotoa:



Tarkastellaan, miten automaatti käsittelee syötteen  $(a \cup b^*)$ :

Tila	Syöte	Pino	Sääntö
$q_0$	$(a \cup b^*)$	$\varepsilon$	
$q_1$	$(a \cup b^*)$	$S \perp$	(1)
$q_1$	$(a \cup b^*)$	$(S \cup S) \perp$	(2) $(S \rightarrow (S \cup S))$
$q_1$	$a \cup b^*$	$S \cup S \perp$	(3)
$q_1$	$a \cup b^*$	$a \cup S \perp$	(2) $(S \rightarrow a)$
$q_1$	$\cup b^*$	$\cup S \perp$	(3)
$q_1$	$b^*$	$S^* \perp$	(2) $(S \rightarrow S^*)$
$q_1$	$b^*$	$b^* \perp$	(2) $(S \rightarrow b)$
$q_1$	$*$	$* \perp$	(3)
$q_1$	$)$	$) \perp$	(3)
$q_1$	$\varepsilon$	$\perp$	(3)
$q_{acc}$	$\varepsilon$	$\varepsilon$	(1)

Huom. kieli  $L(G)$  määrittelee kaikki syntaktisesti oikeanmuotoiset aakkoston  $\Sigma = \{a, b\}$  yli muodostetut säännölliset lausekkeet.

6. **Tehtävä:** Muodosta pinoautomaattia  $M$  vastaava kielioppi, missä  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, F)$ :

$$Q = \{s, q, f\}$$

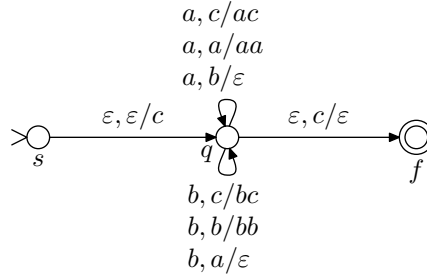
$$\Sigma = \{a, b\}$$

$$\Gamma = \{a, b, c\}$$

$$F = \{f\}$$

$$\delta = \{((s, e, e), (q, c)), ((q, a, c), (q, ac)), ((q, a, a), (q, aa)), \\ ((q, a, b), (q, e)), ((q, b, c), (q, bc)), ((q, b, b), (q, bb)), \\ ((q, b, a), (q, e)), ((q, e, c), (f, e))\}$$

**Vastaus:** Tilakaaviona  $M$  näyttää seuraavalta:



Pinoautomaattia vastaavan yhteydettömän kieliopin selvittäminen on suhteellisen työstä. Tässä käytetään algoritmia, jotka toimii vain *yksinkertaisille* pinoautomaateille. Pinoautomaatti on yksinkertainen, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

- Jos  $((q, u, \beta), (p, \gamma))$  on pinoautomaatin siirtymä, niin  $|\beta| \leq 1$ .
- Jos  $((q, u, e), (p, \gamma)) \in \delta$ , niin myös  $((q, u, A), (p, \gamma A)) \in \delta$  kaikille  $A \in \Gamma$ .

Rajoitukset eivät kuitenkaan heikennä pinoautomaattien ilmaisuvoimaa, sillä mikä tahansa pinoautomaatti voidaan muuttaa yksinkertaiseksi (yksityiskohdat sivuutetaan tässä).

Kieliopin muodostamisen ajatuksena on ottaa kielen väliskeiksi kolmikkoja  $\langle q, A, p \rangle$ , missä  $q, p \in Q$  ja  $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ . Ajatuksena on, että  $\langle q, A, p \rangle$  generoi kaikki ne merkkijonot, joita tutkiessaan automaatti siirtyisi tilasta  $q$  tilaan  $p$  poistaen samalla pinosta symbolin  $A$ .

Kieliopin sääntöjä on neljänlaisia:

1. Kaikille  $f \in F$  asetetaan sääntö  $S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle$ .
2. Kaikille siirtymille  $((q, u, A), (r, B_1 \cdots B_n)) \in \delta$ , missä  $q, r \in Q, u \in \Sigma^*, n > 0, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$  ja  $B_1 \cdots B_n \in \Gamma$ , lisätään sääntö

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow u \langle r, B_1, q_1 \rangle \langle q_1, B_2, q_2 \rangle \cdots \langle q_{n-1}, B_n, p \rangle$$

kaikille  $p, q_1, \dots, q_{n-1} \in Q$ .

3. Kaikille siirtymille  $((q, u, A), (r, \varepsilon)) \in \delta$ , missä  $q, r \in Q, u \in \Sigma^*$  ja  $A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ , lisätään sääntö

$$\langle q, A, p \rangle \rightarrow u \langle r, \varepsilon, p \rangle$$

4. Kaikille  $q \in Q$  lisätään sääntö  $\langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon$ .

Säännöistä ensimmäinen ilmaisee, että tarkoituksena on päästä alkutilasta johonkin lopputilaan niin, että pino jää loppuksi tyhjäksi. Viimeistä muotoa olevat säännöt kertovat, että mitään laskentaa ei tarvita, ellei siirrytä toiseen tilaan. Muotoa 2 olevat säännöt kuvaavat pitkää suoritusta, jolla siirrytään tilasta  $q$  tilaan  $p$  ja samalla poistetaan  $A$  pinosta. Säännön oikea puoli konstruoi automaatin tilasiirtymien jonon siirtymä kerrallaan. Muotoa 3 olevat säännöt ovat analogisia muotoa 2 olevien sääntöjen kanssa.

Kielioppi  $G = (V, \Sigma, P, S), V = \Sigma \cup \{S\} \cup \{\langle q, A, p \rangle \mid q, p \in Q, A \in \Gamma \cup \{\varepsilon\}\}$

$$P = \{S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle, \tag{1.}$$

$$\langle s, \varepsilon, s \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon, \langle f, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon, \tag{4.}$$

$$\langle s, \varepsilon, s \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, s \rangle, \tag{2./tr.1}$$

$$\langle s, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, q \rangle, \tag{2./tr.1}$$

$$\langle s, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon \langle q, c, f \rangle, \tag{2./tr.1}$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow a \langle q, a, s' \rangle \langle s', c, s \rangle \tag{2./tr.2}$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q' \rangle \langle q', c, q \rangle \tag{2./tr.2}$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, f' \rangle \langle f', c, f \rangle \tag{2./tr.2}$$

$$\langle q, a, s \rangle \rightarrow a \langle q, a, s' \rangle \langle s', a, s \rangle \tag{2./tr.3}$$

$$\langle q, a, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q' \rangle \langle q', a, q \rangle \tag{2./tr.3}$$

$$\langle q, a, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, f' \rangle \langle f', a, f \rangle \tag{2./tr.3}$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, s \rangle \tag{3./tr.4}$$

$$\langle q, b, q \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, q \rangle \tag{3./tr.4}$$

$$\langle q, b, f \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, f \rangle \tag{3./tr.4}$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, s' \rangle \langle s', c, s \rangle \tag{2./tr.5}$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q' \rangle \langle q', c, q \rangle \tag{2./tr.5}$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow b \langle q, b, f' \rangle \langle f', c, f \rangle \tag{2./tr.5}$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, s' \rangle \langle s', b, s \rangle \tag{2./tr.6}$$

$$\langle q, b, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q' \rangle \langle q', b, q \rangle \tag{2./tr.6}$$

$$\langle q, b, s \rangle \rightarrow b \langle q, b, f' \rangle \langle f', b, f \rangle \tag{2./tr.6}$$

$$\langle q, a, s \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, s \rangle \tag{3./tr.7}$$

$$\langle q, a, q \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, q \rangle \tag{3./tr.7}$$

$$\langle q, a, f \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, f \rangle \tag{3./tr.7}$$

$$\langle q, c, s \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, s \rangle \tag{3./tr.8}$$

$$\langle q, c, q \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, q \rangle \tag{3./tr.8}$$

$$\langle q, c, f \rangle \rightarrow \varepsilon \langle f, \varepsilon, f \rangle \tag{3./tr.8}$$

Näistä säännöistä suuri osa on tarpeettomia. Tarvittavat saadaan selville lähtemällä liikkeelle säännöstä  $S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle$ , ja katsomalla, mitä kaikkia sääntöjä voidaan käyttää. Tuloksena syntyvät säännöt ovat

$$\begin{aligned}
P = \{ & S \rightarrow \langle s, \varepsilon, f \rangle \\
& \langle s, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow a \langle q, a, q \rangle \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow b \langle q, b, q \rangle \langle q, c, f \rangle \\
& \langle q, c, f \rangle \rightarrow \langle f, \varepsilon, f \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \rightarrow a \langle q, a, q \rangle \langle q, a, q \rangle \\
& \langle q, a, q \rangle \rightarrow b \langle q, \varepsilon, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \rightarrow b \langle q, b, q \rangle \langle q, b, q \rangle \\
& \langle q, b, q \rangle \rightarrow a \langle q, \varepsilon, q \rangle \\
& \langle q, \varepsilon, q \rangle \rightarrow \varepsilon \\
& \langle f, \varepsilon, f \rangle \rightarrow \varepsilon \}
\end{aligned}$$

Kielioppia voi vielä sieventää. Merkitään  $\langle q, c, f \rangle = S$ ,  $\langle q, b, q \rangle = B$ ,  $\langle q, a, q \rangle = A$ , ja tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned}
P = \{ & S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
& A \rightarrow aAA \mid b, \\
& B \rightarrow bBB \mid a \}
\end{aligned}$$

### Liite: Chomskyn normaalimuoto

Muutetaan viimeisen tehtävän kielioppi Chomskyn normaalimuotoon. Kielioppi on Chomskyn normaalimuodossa, mikäli seuraavat ehdot toteutuvat:

1. Ainoastaan alkuvälike  $S$  voi olla tyhjentyvä.
2. Mahdollisesti esiintyvää sääntöä  $S \rightarrow \varepsilon$  lukuunottamatta kaikki säännöt ovat muotoa  $A \rightarrow BC$  tai  $A \rightarrow a$ , missä  $A, B$  ja  $C$  ovat välikkeitä ja  $a$  terminaalisympoli.

Kielioppi muutetaan normaalimuotoon vaiheittain:

1. **Poistetaan lähtösymboli sääntöjen oikealta puolelta.**

Koska kieliopissa on säännöt  $S \rightarrow aAS$  ja  $S \rightarrow bBS$ , lisätään uusi lähtösymboli  $S'$  ja sääntö  $S' \rightarrow S$ . Saadaan tulokseksi sääntöjoukko:

$$\begin{aligned}
& S' \rightarrow S, \\
& S \rightarrow aAS \mid bBS \mid \varepsilon \\
& A \rightarrow aAA \mid b, \\
& B \rightarrow bBB \mid a
\end{aligned}$$

2. **Poistetaan  $\varepsilon$ -produktiot.**

Koska Chomskyn normaalimuodossa ainoastaan lähtösymboli  $S'$  saa olla tyhjentyvä, täytyy muut  $\varepsilon$ -säännöt poistaa kieliopista. Lasketaan aluksi tyhjentyvien välikkeiden joukko NULL:

$$\begin{aligned}
\text{NULL}_0 &= \{S\} & (S \rightarrow \varepsilon) \\
\text{NULL}_1 &= \{S, S'\} & (S' \rightarrow S) \\
\text{NULL}_2 &= \{S, S'\} = \text{NULL}
\end{aligned}$$

Tämän jälkeen korvataan säännöt  $A \rightarrow X_1 \cdots X_n$  joukolla sääntöjä

$$A \rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_2, \quad \text{missä } \alpha_i = \begin{cases} X_i, X_i \notin \text{NULL} \\ X_i \text{ tai } \varepsilon, X_i \in \text{NULL} \end{cases}$$

Lopuksi poistetaan kaikki säännöt muotoa  $A \rightarrow \varepsilon$  (lukuunottamatta sääntöä  $S' \rightarrow \varepsilon$ ).  
Saadaan tulokseksi sääntöjoukko<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \mid \varepsilon \\ S &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\rightarrow aAA \mid b, \\ B &\rightarrow bBB \mid a \end{aligned}$$

### 3. Poistetaan yksikköproduktiot.

Seuraavaksi poistetaan kieliopista kaikki muotoa  $A \rightarrow B$  olevat säännöt, missä sekä  $A$  että  $B$  ovat välitteitä.

Lasketaan ensin joukot  $F(A)$  kaikilla  $A \in V - \Sigma$ :

$$\begin{aligned} F(A) &= F(B) = F(S) = \emptyset \\ F(S') &= \{S\} \end{aligned}$$

Välike  $B$  kuuluu joukkoon  $F(A)$  täsmälleen silloin, kun  $A$ :sta voidaan johtaa  $B$  käyttäen pelkkiä yksikköproduktioita.

Sääntö  $A \rightarrow B$  korvataan sääntöjoukolla  $\{A \rightarrow w \mid \exists C \in F(B) \cup \{B\} : C \rightarrow w \in P\}$ .  
Tulokseksi saadaan sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \mid \varepsilon \\ S &\rightarrow aAS \mid aA \mid bBS \mid bB \\ A &\rightarrow aAA \mid b, \\ B &\rightarrow bBB \mid a \end{aligned}$$

### 4. Poistetaan liian pitkät produktiot.

Viimeisessä vaiheessa lisätään kielioppiin uusi välike  $C_\sigma$  sekä sääntö  $C_\sigma \rightarrow \sigma$  kaikille  $\sigma \in \Sigma$  sekä jaetaan kaikki säännöt  $A \rightarrow w$  ( $|w| > 2$ ) ketjuksi sääntöjä, jotka kaikki johtavat tismalleen kaksi symbolia.

Annetun kieliopin Chomskyn normaalimuodoksi saadaankin seuraava sääntöjoukko:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow C_a S'_1 \mid C_a A \mid C_b S'_2 \mid C_b B \mid \varepsilon \\ S'_1 &\rightarrow AS \\ S'_2 &\rightarrow BS \\ S &\rightarrow C_a S_1 \mid C_a A \mid C_b S_2 \mid C_b B \\ S_1 &\rightarrow AS \\ S_2 &\rightarrow BS \\ A &\rightarrow C_a A_1 \mid b \\ A_1 &\rightarrow AA \\ B &\rightarrow C_a B_1 \mid a \\ B_1 &\rightarrow BB \\ C_a &\rightarrow a \\ C_b &\rightarrow b \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Tarkkaan ottaen tässä vaiheessa pitäisi lisätä vielä uusi aloitusvälike  $S''$  ja säännöt  $S'' \rightarrow \varepsilon \mid S'$ , mutta tässä tapauksessa ei synny ongelmia, vaikka käytetään  $S'$ :a lähtösymbolina.

### Liite: CYK-algoritmi

CYK-algoritmillä voidaan tutkia kuuluuko sana  $x = x_1 \cdots x_n$  kieliopin  $G$  määrittelemään kieleen. Algoritmin kuluessa lasketaan välikkejoukot  $N_{ik}$ . Joukko  $N_{ik}$  käsittää kaikki ne välikkeet, joista voidaan johtaa osajono  $x_i \cdots x_{i+k}$ , eli sanan  $x$  kohdasta  $i$  alkava  $k$ :n merkin mittainen osajono. Joukkojen laskemisessa voidaan käyttää apuna dynaamista ohjelmointia seuraavaan tapaan:

$$N_{i,1} = \{A \mid (A \rightarrow x_i) \in P\}$$

$$N_{i,k} = \bigcup_{j=1}^{k-1} \{A \in V - \Sigma \mid G\text{:ssä on sääntö } A \rightarrow BC, \\ \text{missä } B \in N_{ij} \text{ ja } C \in N_{i+j,k-j}\}$$

Tarkastellaan kielioppia  $G$ :

$$\begin{aligned} S &\rightarrow C_a D \mid C_a A \mid C_a E \mid BC_b \mid a \mid b \\ A &\rightarrow C_a D \mid C_a A \mid a \\ B &\rightarrow C_a E \mid BC_b \mid b \\ D &\rightarrow AC_b \\ E &\rightarrow BC_b \\ C_a &\rightarrow a \\ C_b &\rightarrow b \end{aligned}$$

Tarkistetaan, kuuluvatko sanat  $w_1 = aabbb$  ja  $w_2 = aabb$  kieleen  $L(G)$ . Koska  $w_2$  on  $w_1$ :n prefiksi, täytyy taulukko tehdä ainoastaan sanalle  $w_1$ .

Lasketaan ensin joukot  $N_{i1}$ ,  $i \leq 5$ :

		$i \rightarrow$				
		1 : a	2 : a	3 : b	4 : b	5 : b
$k \downarrow$	1	<u>aabbb</u> {S, A, C <sub>a</sub> }	a <u>abbb</u> {S, A, C <sub>a</sub> }	aa <u>bbb</u> {S, B, C <sub>b</sub> }	aab <u>bb</u> {S, B, C <sub>b</sub> }	aabbb <u></u> {S, B, C <sub>b</sub> }

Kussakin taulukon ruudussa on alleviivattuna ruutua vastaava sanan osajono.

Lasketaan seuraavaksi  $N_{12}$ , eli niiden välikkeiden joukko, jolla voidaan johtaa sanan alussa oleva  $aa$ . Koska normaalimuotoisissa kieliopissa ei ole yhtään sääntöä, jolla voisi suoraan johtaa useamman kuin yhden terminaalisympolin, voidaan  $aa$  saada ainoastaan siten, että johdetaan jostain välikkeestä kaksi  $a$ :n tuottavaa välikettä. Käytännössä tämä tapahtuu siten, että etsitään kaikki sellaiset välikkeet  $X$ , joille on olemassa sääntö  $X \rightarrow YZ$ , missä  $Y \in N_{11}$  ja  $X \in N_{21}$ .

$$\begin{aligned} N_{11} = \{S, A, C_a\} &\Rightarrow N_{12} = \{S, A\} . \\ N_{21} = \{S, A, C_a\} & \end{aligned}$$

Tässä käytettiin sääntöjä  $S \rightarrow C_a A$  ja  $A \rightarrow C_a A$ . Ruudulle  $N_{22}$  saadaan vastaavasti:

$$\begin{aligned} N_{21} = \{S, A, C_a\} &\Rightarrow N_{22} = \{D\} . \\ N_{31} = \{S, B, C_b\} & \end{aligned}$$

Ainoa ehdot täyttävä sääntö on  $D \rightarrow AC_b$ . Kokonaisuudessaan taulukon toiseksi riviksi muodostuu:

		$i \rightarrow$				
		1 : a	2 : a	3 : b	4 : b	5 : b
$k \downarrow$	1	<u>aabbb</u> {S, A, C <sub>a</sub> }	a <u>abbb</u> {S, A, C <sub>a</sub> }	aa <u>bbb</u> {S, B, C <sub>b</sub> }	aab <u>bb</u> {S, B, C <sub>b</sub> }	aabbb <u></u> {S, B, C <sub>b</sub> }
	2	<u>aabbb</u> {S, A}	a <u>abbb</u> {D}	aa <u>bbb</u> {S, B, E}	aab <u>bb</u> {S, B, E}	aabbb <u></u> {S, B, E}

Ruudun  $N_{13}$  kohdalla huomataan, että sanan kolme ensimmäistä merkkiä ( $aab$ ) voidaan johtaa kahdella eri tavalla:

1. johdetaan  $a$  välikkeellä  $X \in N_{11}$  ja  $ab$  välikkeellä  $Y \in N_{22}$ ; tai
2. johdetaan  $aa$  välikkeellä  $X \in N_{12}$  ja  $b$  välikkeellä  $Y \in N_{31}$ .

Vastaavat joukot ovat:

$$j = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} N_{11} = \{S, A, C_a\} \\ N_{22} = \{D\} \end{array} \quad j = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} N_{12} = \{S, A\} \\ N_{31} = \{S, B, C_b\} \end{array}$$

Tapausta  $j = 1$  vastaava välikejoukko on  $\{S, A\}$  ( $S \rightarrow C_a D, A \rightarrow C_a D$ ) ja tapausta  $j = 2$  vastaava on  $\{D\}$  ( $D \rightarrow AC_b$ ), joten  $N_{13} = \{S, A, D\}$ . Samaan tapaan jatkamalla saadaan lopulta koko taulukoksi:

		$i \rightarrow$				
		1 : $a$	2 : $a$	3 : $b$	4 : $b$	5 : $b$
$k \downarrow$	1	$\underline{aabb}$ $\{S, A, C_a\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, A, C_a\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, C_b\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, C_b\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, C_b\}$
	2	$\underline{aabb}$ $\{S, A\}$	$\underline{aabb}$ $\{D\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, E\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, E\}$	
	3	$\underline{aabb}$ $\{A, S, D\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B\}$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, E\}$		
	4	$\underline{aabb}$ $\emptyset$	$\underline{aabb}$ $\{S, B, E\}$			
	5	$\underline{aabb}$ $\{S, B\}$				

Viimeisessä vaiheessa täytyi käydä läpi neljä eri kombinaatiota:  $(N_{11}, N_{24}), (N_{12}, N_{33}), (N_{13}, N_{42})$  sekä  $(N_{14}, N_{51})$ .

Koska  $S \in N_{15}$ , niin  $aabb \in L(G)$ . Toisaalta, koska  $S \notin N_{1,4}$ , niin  $aabb \notin L(G)$ . Taulukosta voidaan konstruoida suoraan sanan  $w_1$  jäsenyspuu käymällä se läpi takaperin:  $S$  saadaan ruutuun  $N_{15}$  ruuduista  $N_{11}$  ja  $N_{24}$  käyttäen välitteitä  $C_a$  ja  $E$ , joten ensimmäisenä käytetään sääntöä  $S \rightarrow C_a E$ . Ylläolevassa taulukossa on sanan  $w_1$  johdossa käytetyt välitteet alleviivattu. Kokonaisuudessaan jäsenyspuu on seuraavanlainen:

