

4. Tehtävässä halutaan todistaa seuraava ongelma ratkeamattomaksi:

Hyväksyykö annettu Turingin kone  $M$  syötteen  $\varepsilon$ ?

Määritellään aluksi kieli  $L = \{M \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } \varepsilon\}$ . Nyt  $L$  on rekursiivinen jos ja vain jos tehtävänannon ongelma on ratkeava. Seuraavaksi osoitetaan, että kieli  $H = \{Mw \mid M \text{ pysähtyy syötteellä } w\}$  voidaan palauttaa rekursiivisesti (*recursively reduce*) kieleen  $L$  (merkitään  $H \leq_m L$ ), joten  $L$  on vähintään yhtä vaikea kuin  $H$ . Koska  $H$  ei ole rekursiivinen (monisteen lause 6.9), ei  $L$  voi myöskään olla rekursiivinen.

Rekursiivinen palautus määritellään seuraavasti: Olkoon  $A \subseteq \Sigma^*$  ja  $B \subseteq \Gamma^*$  kieliä. Nyt  $A \leq_m B$  jos ja vain jos on olemassa rekursiivinen funktio  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  siten, että

$$\forall w \in \Sigma^* : w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B .$$

Tässä tapauksessa halutaan löytää funktio  $f$  siten, että  $f(Mw) \in L$  jos ja vain jos  $Mw \in H$ . Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että halutaan löytää systemaattinen tapa rakentaa Turingin kone  $M'$ , joka pysähtyy tyhjällä syöttellä täsmälleen silloin, kun kone  $M$  pysähtyy syötteellä  $w = w_1w_2 \cdots w_n$ .

Onneksi tämä on helppo tehtävä. Kone  $M'$  kirjoittaa ensin nauhalle sanan  $w$ , siirtyy takaisin nauhan alkuun, ja alkaa simuloida konetta  $M$  tekemällä samat siirtymät kuin  $M$ :kin tekisi. Nyt  $M'$  pysähtyy jos ja vain jos  $M$  pysähtyy.

Formaalisti  $f$  voidaan määritellä seuraavasti:

$$f(\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej} \rangle, w_1w_2 \cdots w_n) = \langle Q', \Sigma, \Gamma, \delta', q'_0, q_{acc}, q_{rej} \rangle,$$

missä

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cup \{q'_i \mid 0 \leq i \leq n\} \\ \delta' &= \delta \cup \{ \langle q'_i, \varepsilon, q'_{i+1}, w_{i+1}, R \rangle \mid 0 \leq i < n \} \\ &\quad \cup \{ \langle q'_n, x, q'_n, x, L \rangle \mid x \in \Gamma \cup \{<\} \} \\ &\quad \cup \{ \langle q'_n, >, q_0, >, R \rangle \} \end{aligned}$$

Koska koneeseen  $M$  lisätään vain äärellinen määrä uusia tiloja ja siirtymiä ( $n$  ei voi olla ääretön), on  $f$  selvästikin rekursiivinen funktio.

5. **Tehtävä:** Todista monisteen Lause 6.15:

- (i) Kieli  $A \subseteq \Sigma^*$  on rekursiivinen, jos ja vain jos sen karakteristinen funktio

$$\chi_A : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in A; \\ 0, & \text{jos } x \notin A \end{cases}$$

on rekursiivinen funktio.

- (ii) Kieli  $A \subseteq \Sigma^*$  on rekursiivisesti numeroituva, jos ja vain jos on  $A = \emptyset$  tai on olemassa rekursiivinen funktio  $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ , jolla

$$A = \{g(x) \mid x \in \{0, 1\}^*\}.$$

**Vastaus:** Määritellään aluksi viisi yksinkertaista apukonetta:

- **1** kirjoittaa nauhalle merkin 1, siirtää lukupäätä askeleen oikealle ja pysähtyy.
- **0** kirjoittaa nauhalle merkin 0, siirtää lukupäätä askeleen oikealle ja pysähtyy ja pysähtyy.
- *C* tyhjentää koneen syötenauhan, palauttaa lukupään nauhan alkuun ja pysähtyy.
- NEXT lukee nauhalla olevan merkkijonon  $x \in \Sigma^*$  ja korvaa sen leksikografisesti seuraavalla merkkijonolla (tehtävän 9.2 tapaan).
- $Cmp^{i,j}$  vertailee moninauhaisen Turingin koneen nauhoja  $i$  ja  $j$  keskenään ja hyväksyy syötteen mikäli niiden sisältö on sama.

Koneet ovat yksinkertaisia, joten niitä ei esitetä tässä.

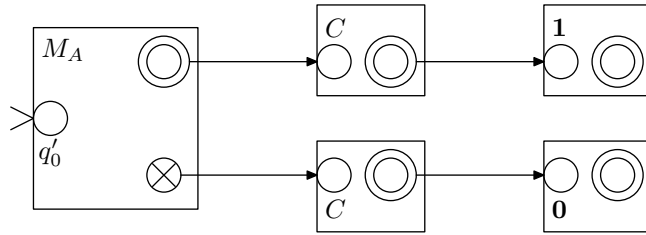
(i)  $\Rightarrow$  Olkoon kieli  $A \subseteq \Sigma^*$  rekursiivinen. Tällöin on olemassa Turingin kone

$$M_A = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc}, q_{rej} \rangle$$

siten, että:

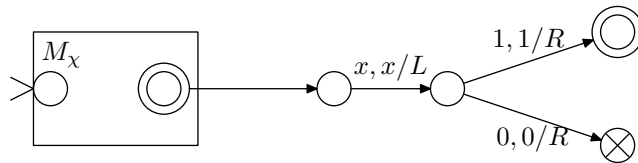
$$\begin{aligned} \forall w \in \Sigma^* : w \in L &\Leftrightarrow (q_0, w) \vdash_{M_A}^* (q_{acc}, \alpha) \quad \text{ja} \\ w \notin L &\Leftrightarrow (q_0, w) \vdash_{M_A}^* (q_{rej}, \alpha) \end{aligned}$$

Muodostetaan Turingin kone  $M$  yhdistämällä kone  $M_A$  koneisiin **1**, **0** ja *C* seuraavaan tapaan:



Mikäli  $w \in L$ , niin kone  $M_A$  päättyy hyväksyvään tilaan, minkä jälkeen  $M$  tyhjentää nauhan ja kirjoittaa nauhalle luvun 1. Muussa tapauksessa nauhalle kirjoitetaan 0. Koska  $A$  on rekursiivinen,  $M_A$  pysähtyy aina, joten myös  $M$  pysähtyy aina, joten  $M$  laskee funktion  $\chi(w) = \begin{cases} 1, & w \in A \\ 0, & w \notin A \end{cases}$ , joka on kielen  $A$  karakteristinen funktio.

$\Leftarrow$  Seuraavaksi oletetaan, että funktio  $\chi(w)$  on rekursiivinen. Tällöin on olemassa Turingin kone  $M_\chi$ , joka laskee sen arvon. Määritelmän mukaan  $M_\chi$  pysähtyy aina, ja laskennan tulos kirjoitetaan nauhalle lukupään vasemmalle puolelle. Muodostetaan Turingin kone  $M$  seuraavaan tapaan:



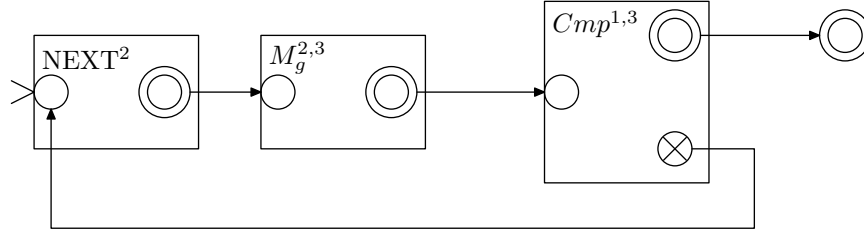
Nyt kone  $M$  hyväksyy sanan  $w$  aina, kun  $\chi(w) = 1$ , ja hylkää sen, kun  $\chi(w) = 0$ . Näin ollen  $M$  tunnistaa kielen  $A$  totaalisesti, joten  $A$  on rekursiivinen.

(ii) Halutaan todistaa väite:

Kieli  $A \subseteq \Sigma^*$  on rekursiivisesti numeroituvaa ( $A \in RE$ ), jos ja vain jos  $A = \emptyset$  tai on olemassa rekursiivinen funktio  $g : \{0, 1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ , jolla

$$A = \{g(x) \mid x \in \{0, 1\}^*\}$$

Mikäli  $A = \emptyset$ , niin triviaalisti  $A \in RE$  ja  $g(x) = 0$  vastaava rekursiivinen funktio. Jos annetut ehdot täyttävä funktio  $g$  on olemassa, niin on olemassa Turingin kone  $M_g$ , joka laskee  $g$ :n. Tästä voidaan triviaalisti muodostaa kaksinauhainen kone  $M_g^{1,2}$ , joka laskee  $g$ :n mutta tallettaa tuloksen toiselle nauhalle ensimmäisen asemasta. Muodostetaan 3-nauhainen Turingin kone  $M_A$  seuraavasti:



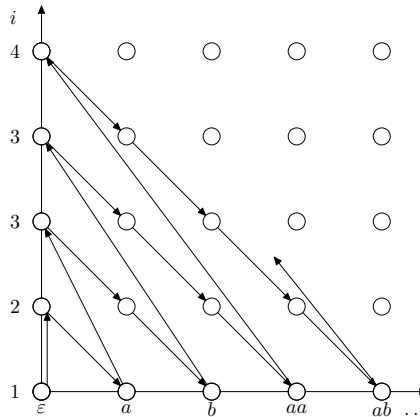
Kone saa syötteensä ensimmäisellä nauhalla, ja sitä ei enää missään vaiheessa muuteta. Varsinaisessa laskentasilmuksessa  $M_A$  korvaa 2. nauhalla olevan bittijonon  $x$  leksikografisesti seuraavalla bittijonolla  $y$ , minkä jälkeen lasketaan  $g(y)$  ja talletetaan tulos 3. nauhalle. Lopuksi vertaillaan 1. ja 3. nauhojen sisältö keskenään. Mikäli nauhojen sisältö on sama, sana hyväksytään, muuten palataan alkuun.

[ $\Leftarrow$ ] Tarkastellaan sanaa  $w \in A$ . Oletetaan, että annetut ehdot täyttävä rekursiivinen funktio  $g$  on olemassa. Tällöin  $w = g(x)$  jollain  $x = x_1x_2 \cdots x_n$ , missä  $n$  on äärellinen. Koska millä tahansa äärellisen mittaisella merkkijonolla on vain äärellinen määrä edeltäjiä leksikografisessa järjestyksessä, generoi NEXT lopulta  $x$ :n, jolloin  $M_g^{2,3}$  laskee kolmannelle nauhalle sanan  $w$ , ja kone hyväksyy sanan. Näin ollen  $M_A$  tunnistaa kielen  $A$ , joten  $A \in RE$ .

[ $\Rightarrow$ ] Seuraavaksi oletetaan, että  $A \in RE - \{\emptyset\}$ . Tällöin on olemassa Turingin kone  $M_A$ , joka tunnistaa  $A$ :n. Määritellään apukone  $M_{A,i}$ , joka simuloi koneen  $M_A$  toimintaa  $i$ :n askeleen ajan. Kone  $M_{A,i}$  hyväksyy syötteen  $x$  mikäli  $M_A$  hyväksyy sen käyttäen korkeintaan  $i$  askelta, muuten se hylkää sen. Huomataan, että kone  $M_{A,i}$  on totaalinen, eli se pysähtyy aina.

Funktio  $g$  rakennetaan koneen  $M_{A,i}$  avulla. Kaikki syötteen  $x$  ja rajat  $i$  koodataan funktion  $c(x, y) = 0^x 10^y$  avulla bittijonoiksi pareittain<sup>1</sup>, ja  $g(c(x, y)) = x$ , mikäli  $M_{A,y}$  hyväksyy sanan  $x$ . Funktiota  $g$  määriteltäessä valitaan jokin kiinnitetty sana  $x_0 \in A$ , joka palautetaan aina kun  $M_{A,y}$  ei pysähdy tai jos  $g$ :n syöte on väärää muotoa.

Konstruktion perusajatuksena on käydä läpi kaikki mahdolliset  $M_A$ :n syötteen lomitettuina: ensin ajetaan  $M_A$ :ta yhden askeleen verran ensimmäisellä syötteellä, sitten kaksi askelta ensimmäisellä syötteellä, yksi askel toisella syötteellä, jne. Alla olevassa kuvassa on tämä havainnollistettu aakkostolle  $\Sigma = \{a, b\}$  (huomaa samankaltaisuus tehtävän 2.5 kanssa):



<sup>1</sup>Tässä samaistetaan  $\Sigma^*$ :n sanat luonnollisten lukujen kanssa tavanomaiseen tapaan käyttäen leksikografista järjestystä.

Esitetään vielä lopuksi todistus formaalimmin: Määritellään funktio  $g' : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  seuraavasti:

$$g'(w) = \begin{cases} x, & w = 0^x 10^y \text{ ja } M_{A,y}(x) \text{ pysähtyy} \\ x_0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä  $x_0 \in A$ . Lopuksi määritellään funktio  $g(x) = d(g'(x))$ , missä  $d$  on funktio, joka kuvaa bittijonon  $0^x$  joukon  $\Sigma^*$   $x$ :nteen alkioon leksikografisessa järjestyksessä. Funktion  $g'(x)$  arvo voidaan laskea äärellisessä ajassa, koska  $M_{A,y}(x)$  ei voi jäädä ikuisen silmukkaan. Näin ollen  $g'$  on rekursiivinen, joten myös  $g$ :kin on.

Tässä vaiheessa on huomattava, että vaikka  $g$  on aina olemassa, niin sitä ei ole välttämättä mahdollista löytää, sillä sopivan alkion  $x_0 \in A$  etsiminen on yleisessä tapauksessa ratkeamaton ongelma.