T-79.148 **Syksy 2002**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 9
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)

   Vastaus: Olkoon kieli $L = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$. Tämä kieli on osoitettu yhteydettömäksi (opetusmoniste s. 72). Osoitetaan että yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen esittämällä L:n kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.

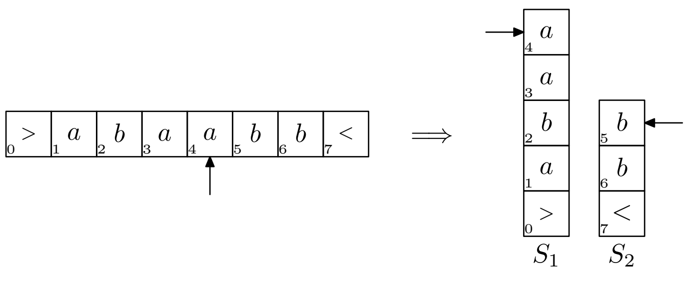
   Olkoon $L_1 = \{a^* b^k c^k \mid k \geq 0\}$ ja $L_2 = \{a^k b^k c^* \mid k \geq 0\}$. Nyt sekä L_1 että L_2 ovat yhteydettömiä, mutta $L = L_1 \cap L_2$, joten yhteydettömät kielet eivät ole suljettuja leikkauksen suhteen.

   Tuloksesta seuraa suoraan se, että yhteydettömät kielet eivät voi olla suljettuja komplementin suhteen, sillä ne ovat suljettuja unionin suhteen ja DeMorganin sääntöjen perusteella $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

   Osoitetaan vielä lopuksi, että L_1 ja L_2 ovat todellakin yhteydettömiä muodostamalla niitä vastaavat kieliopit. Kielen L_1 generoi yhteydetön kielioppi $G_1 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_1, S)$, missä $P_1 = \{S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to bBc \mid \varepsilon\}$. Kielen L_2 generoiva kielioppi $G_2 = (\{S, A, B, a, b, c\}, \{a, b, c\}, P_2, S)$, $P_2 = \{S \to AB, A \to aAb \mid \varepsilon, B \to cB \mid \varepsilon\}$.

5. **Tehtävä**: Osoita, että pinoautomaateilla, joilla on yhden sijasta kaksi pinoa, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin Turingin koneilla.

   Vastaus: Osoitetaan ensin, että pinoautomaatilla, jossa on kaksi pinoa, voidaan simuloida Turingin konetta. Ainut hankaluus tässä on keksiä, miten kahdella pinolla simuloidaan Turingin koneen nauhaa. Tämä onnistuu samalla periaatteella kuin edellisessä tehtävässä simuloitiin kahteen suuntaan ääretöntä nauhaa: toiseen pinoon talletetaan lukupään vasemmalla puolella olevat merkit käänteisessä järjestyksessä, toiseen pinoon pään oikealla puolella olevat merkit:



   Pinoautomaatin toiminta jakautuu kahteen vaiheeseen:

   (a) Alustus, jolloin automaatti kopioi syötteen pinoon S_1, mistä se siirtään merkki kerrallaan pinoon S_2 lukuunottamatta syötteen ensimmäistä merkkiä.

   (b) Varsinainen toiminta, jolloin automaatti tekee siirtymän pinon S_1 päällimmäisen merkin perusteella. Mikäli Turingin kone siirtäisi lukupäätä vasemmalle, siirretään pinon S_1 päällimmäinen merkki pinon S_2 päälle. Mikäli taas lukupää siirtyisi oikealle, siirretään S_2:n päällimmäinen merkki S_1:n päälle.

   Näin laadittu pinoautomaatti simuloi annettua Turingin konetta.

   Seuraavaksi osoitetaan, että Turingin koneella voidaan simuloida pinoautomaattia, jossa on kaksi pinoa. Tämä onnistuu triviaalisti käyttämällä kaksinauhaista epädeterministä Turingin konetta, jossa kumpikin pinoista talletetaan omalle nauhalleen.

Formaalisti annettu muunnos Turingin koneesta kaksipinoiseksi pinoautomaatiksi voidaan määritellä seuraavasti:

Olkoon annettuna Turingin kone $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}}\}$. Muodostetaan 2-pinoinen pinoautomaatti $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', p_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$, missä:

$$\begin{aligned}
Q' =& Q \cup \{p_0, p_1, p_2\} \\
\Sigma' =& \Sigma \cup \{<\} \\
\Gamma' =& \Gamma \cup \{>, <\} \\
\delta' =& \{((p_0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, >, \varepsilon)), ((p_1, <, \varepsilon, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, <))\} \\
& \cup \{((p_1, x, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, x, \varepsilon)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((p_2, \varepsilon, x, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, x)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, \varepsilon), (q_2, \varepsilon, b)) \mid (q_1, a, q_2, b, L) \in \delta\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, x), (q_2, xb, \varepsilon)) \mid (q_1, a, q_2, b, R) \in \delta, x \in \Gamma'\}
\end{aligned}$$