

Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 6
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

Lemma (Pumppauslemma). Olkoon A säännöllinen kieli. Tällöin on olemassa $n \geq 1$ siten, että kaikki A :n merkkijonot x , joiden pituus $|x| \geq n$ ovat ilmaistavissa muodossa $x = uvw$, missä $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ ja merkkijonot muotoa $uw^i w$ kuuluvat kieleen A kaikilla $i \geq 0$. Kompaktimmin, painottaen pumppauslemman asettamia vaatimuksia, voimme kirjoittaa seuraavasti:

\forall säännöllisille kielille A

$\exists n \geq 1$ s.e.

$\forall x \in A : |x| \geq n$

\exists osinjako $x = uvw$, missä $|uv| \leq n$ ja $|v| \geq 1$

$\forall i \geq 0 \quad uw^i w \in A$.

Pumppauslemmaa voidaan käyttää hyväksi, kun halutaan osoittaa kieli L *ei-säännölliseksi*. Tehdään ensin vasta oletus, eli oletetaan L säännölliseksi kieleksi. Tavoitteena on päästä ristiriitaan tämän oletuksen kanssa seuraten pumppauslemman asettamia vaatimuksia säännöllisille kielille.

Pumppauslemmaa käytettäessä täytyy aina muistaa, että sillä voi osoittaa vain kielen epä-säännöllisyyden, ja sitä *ei* voi käyttää toiseen suuntaan. Esimerkiksi kieli $I = \{c^i a^n b^n \mid i > 0 \wedge n \geq 0\} \cup L(a^* b^*)$ ei ole säännöllinen, mutta kaikki siihen kuuluvat sanat (tyhjää sanaa lukuunottamatta) voidaan osoittaa pumppauslemman ehtojen mukaisesti. Näin ollen kieltä I ei voida suoraan todistaa epä-säännölliseksi, vaan todistuksessa täytyy käyttää apuna säännöllisten kielten sulkeumaominaisuuksia 5. tehtävän vastauksessa esitettävään tapaan.

Jos halutaan osoittaa kieli säännölliseksi, voidaan muodostaa sen hyväksyvä äärellinen automaatti, sillä pätee: Kieli L on säännöllinen \Leftrightarrow on olemassa äärellinen automaatti M , joka hyväksyy kielen L (merkitään $L(M) = L$).

4. **Tehtävä:** *Hahmolausekkeet* ovat esimerkiksi UN^*X -järjestelmien tekstityökaluissa käytetty säännöllisten lausekkeiden yleistys, jossa sallitaan merkkijonoarvoisten muuttujien käyttö lausekkeissa. Sovitettaessa merkkijonoa annettuun lausekkeeseen vaaditaan, että tietynnimisen muuttujan arvoksi tulee eri kohdissa sama osamerkkijono. Siten esimerkiksi aXb^*Xa ja $aX(a \cup b)^*YX(a \cup b)^*Ya$ ovat aakkoston $\{a, b\}$ hahmolausekkeitä, joista ensimmäinen kuvaa kielen $\{awb^n wa \mid w \in \{a, b\}^*, n \geq 0\}$. Osoita, että hahmolausekkeet ovat säännöllisten lausekkeiden aito yleistys, so. niillä voidaan kuvata myös joitakin ei-säännöllisiä kieliä.

Vastaus: Osoittaaksemme, että tehtävän hahmolausekkeet on säännöllisten lausekkeiden aito yleistys, tulee meidän löytää hahmolauseke, jonka määrittämä kieli ei ole säännöllinen.

Tarkastellaan hahmolausekettä XX vastaavaa kieltä $L = \{zz \mid z = \{a, b\}^*\}$. Oletetaan, että L on säännöllinen. Valitaan $x = a^n b a^n b \in L$. Nyt $|x| = 2n + 2 > n$. Pumppauslemman mukaan voidaan kirjoittaa $x = uvw$, missä $|uv| \leq n$ ja $|v| \geq 1$. Siis $u = a^{n-|v|-k}$, $v = a^{|v|}$ ja $w = a^k b a^n b$, missä $0 \leq k < n$. Nyt pumppauslemman mukaan kaikille $i \geq 0$ tulisi päteä $uw^i w \in L$. Kuitenkin $uw^0 w = uw = a^{n-|v|} b a^n b \notin L$, sillä se ei ole muotoa zz , koska vaadittiin $|v| \geq 1$. Päädyttiin siis ristiriitaan oletuksen kanssa. L ei näin ollen voi olla säännöllinen.

Löydettiin siis ei-säännöllinen kieli, joka voidaan kuvata hahmolausekkeella. Näin ollen hahmolausekkeet ovat säännöllisten lausekkeiden aito yleistys. \square

5. **Tehtävä:** Osoita, että kieli $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{:ssä on yhtä monta } a\text{:ta ja } b\text{:tä}\}$ ei ole säännöllinen, ja laadi yhteydetön kielioppi sen kuvaamiseen.

Vastaus: Annetun kielen $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w\text:ssä on yhtä monta } a\text{:ta ja } b\text{:tä}\}$ voisi todistaa säännölliseksi suoraan pumppauslemmalla. Tässä esitetään kuitenkin hieman monimutkaisempi ratkaisu esimerkkinä siitä, miten ”hankalia” kieliä voidaan käsitellä.

Määritellään kieli $L' = L \cap L(a^*b^*)$. Oletetaan, että L on säännöllinen. Koska säännöllisten kielten joukko on suljettu leikkauksen suhteen ja $L(a^*b^*)$ on säännöllinen, täytyy tällöin myös L' :n olla säännöllinen. (Toisinpäin ehto ei päde: L' voi olla säännöllinen vaikka L ei olisi, sillä esim. $A \cap \emptyset = \emptyset$ kaikille kielille A).

Huomataan, että $L' = \{a^k b^k \mid k \geq 0\}$. Tarkastellaan sanaa $w = a^n b^n$, missä n on pumppauslemmassa esiintyvä parametri. Yritetään osoittaa w lemman ehtojen mukaisesti. Koska $|xy| \leq n$, osituksen täytyy olla muotoa;

$$\begin{aligned}x &= a^{n-i-k} \\y &= a^i \\z &= a^k b^n,\end{aligned}$$

missä $0 < i \leq n$ ja $i + k \leq n$. Nyt $xz = a^{n-i} b^n$, joten $xz \notin L'$. Näin ollen sanaa w ei voida pumpata, eikä L' ole säännöllinen, joten myöskään L ei ole säännöllinen.

Alla kielen L kuvaava yhteydetön kielioppi G :

$$\begin{aligned}G &= (V, \Sigma, P, S), \text{ missä} \\V &= \{S, T, a, b\}, \\ \Sigma &= \{a, b\}, \\ P &= \{ S \rightarrow SS \mid aT \mid Ta \mid \varepsilon, \\ &\quad T \rightarrow ST \mid TS \mid b\}\end{aligned}$$

Tässä kieliopissa välikkeellä S johdetaan merkkijonot, joissa on molempia aakkosia yhtä monta, ja T :llä kaikki joissa on b -merkkejä yksi enemmän kuin a -merkkejä.

Esimerkki. Annetaan johto merkkijonolle $aababb \in L$.

$$\begin{aligned}S &\Rightarrow aT \\ &\Rightarrow aST \\ &\Rightarrow aaTT \\ &\Rightarrow aabT \\ &\Rightarrow aabST \\ &\Rightarrow aabaTT \\ &\Rightarrow aababT \\ &\Rightarrow aababb\end{aligned}$$

6. **Tehtävä:** Laadi yhteydetön kielioppi, joka tuottaa kaikki seuraavan esimerkin tapaiset, yksinkertaisista sisäkkäisistä `for`-silmukoista, `begin`- ja `end`-sulkeilla kootuista lauseista ja alkeisoperaatioista `a` rakentuvat ”ohjelmat”:

```
a;
for 3 times do
begin
  for 5 times do a;
  a; a
end
```

Silmukkalaskureiden voit olettaa olevan kokonaislukuja väliltä $0, \dots, 9$.

Vastaus: Ohjelmointikielten kieliopit määritellään useimmiten siten, että aakkostoksi otetaan kielessä esiintyvät syntaktiset elementit (lekseemit). Tässä tapauksessa niitä ovat numerot, `a` sekä varatut sanat. Ohjelman jäsentäminen jaetaan kahteen osaan:

- (a) Muutetaan ohjelman teksti jonoksi lekseemeitä tilakoneiden avulla.

(b) Muodostetaan lekseemijonon jäsenyspuu.

Tehtävän kieliopin voi määritellä monellakin eri tapaa, tässä on yksi mahdollinen tulkinta:

$$G = (V, \Sigma, P, C)$$

$$V = \{C, S, N, \text{begin}, \text{do}, \text{end}, \text{for}, \text{times}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ;, a\}$$

$$\Sigma = \{\text{begin}, \text{do}, \text{end}, \text{for}, \text{times}, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ;, a\}$$

Tässä välikkeen S tulkintana on "lause" (*statement*), C :n "yhdistetty lause" (*compound statement*) ja N :n "numero". Kieliopin säännöt määritellään seuraavasti:

$$P = \{C \rightarrow S \mid S; C$$

$$S \rightarrow a \mid \text{begin } C \text{ end} \mid \text{for } N \text{ times do } S$$

$$N \rightarrow 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9\}$$

Esimerkki. Tehtävänannossa esiintyneen ohjelman jäsenyspuu:

```

      C
    S   ;   C
    a     S
for   N   times   do   S
      3           begin   C   end
                   S   ;           C
for   N   times   do   S   S   ;   C
      5                   a   a           S
                                   a
  
```