Tik-79.148 **Kevät 2001**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

4. 1° Perustapaus: Tarkastellaan pienintä mahdollista ei-tyhjää joukkoa $S_1 = \{a_1\}$. Tälle on olemassa vain yksi osittaisjärjestys $R_1 = \{(a, a)\}$. (Osittaisjärjestys on refleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen binäärirelaatio).

   Joukon alkio $a \in S$ on minimialkio täsmälleen silloin, kun se ei esiinny relaatiossa oikealla puolella (refleksiivistä kaarta lukuunottamatta), formaalimmin:

$$\forall a, b \in S : (b, a) \in R \Rightarrow a = b,$$

   Osittaisjärjestyksessä R_1 alkio a täyttää ylläolevan ehdon, joten se on minimialkio.

   2° Induktio-oletus: Oletetaan, että on olemassa jokin luonnollinen luku n, jolle pätee: kun $|S| < n$, kaikilla S:n alkioista muodostetuilla osittaisjärjestyksillä on minimialkio.

   3° Induktioaskel: Olkoon $S_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ joukko, jossa on n alkiota, ja olkoon R_n jokin (mikä tahansa) S_n:n alkioista muodostettu osittaisjärjestys. Valitaan nyt mielivaltainen alkio a_i $(1 \leq i \leq n)$, poistetaan se joukosta S_n, ja poistetaan relaatiosta kaikki siihen viittaavat parit:

$$\begin{aligned} S'_n &= S_n - \{a_i\} \\ R'_n &= \{(a, b) \in R_n \mid a \neq a_i \wedge b \neq a_i\} \end{aligned}$$

   Nyt R'_n on myös osittaisjärjestys (todista tämä itsellesi, seuraa pohjimmiltaan R_n:n transitiivisuudesta). Koska joukossa S'_n on $n - 1$ alkiota $(< n)$, R'_n:ssa on induktio-oletuksen perusteella ainakin yksi minimialkio, jota merkitään $a_{\min}$.

   Palataan tarkastelemaan relaatiota R_n. Nyt on olemassa kaksi mahdollista tapausta:

   i) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \notin R_n$, on $a_{\min}$ myös osittaisjärjestyksen R_n minimialkio, koska R_n:n ja R'_n:n ainoana erona on alkio a_i ja siihen liittyvät kaaret.

   ii) Mikäli kaari $(a_i, a_{\min}) \in R_n$, ei $a_{\min}$ voi olla minimialkio. Koska $a_{\min}$ on kuitenkin osittaisjärjestyksen R'_n minimialkio ja koska osittaisjärjestys on aina transitiivinen, relaatiossa R_n ei voi olla kaarta $(b, a_i) \in R_n, b \neq a_i$. Muussa tapauksessa myös kaari $(b, a_{\min}) \in R'_n$, eikä $a_{\min}$ olisi R'_n:n minimialkio. Näin ollen alkio a_i on R_n:n minimialkio, ja induktiotodistus saatiin valmiiksi.

5. Juhlissa on paikalla n henkilöä. Yritetään antaa jokaiselle eri määrä tuttavia:

Henkilö	Tuttavia
1	0
2	1
3	2
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-1$

Nyt huomataan, että viimeinen henkilö on kaikkien tuttu, mutta ensimmäinen ei tunne ketään. Nämä arvot ovat ristiriidassa, ja toinen niistä on mahdoton. Jäljelle jää n henkilöä ja $n-1$ mahdollista tuttavuuksien lukumäärää. Kyyhkyslakkaperiaatteen mukaan kaikilla ei voi olla eri määrää tuttavuuksia.

6. Määritellään merkkijonojen v ja w $(v, w \in \Sigma^*)$ katenaatio $v \circ w$:

   1° Jos $|v| = 0$, niin $v \circ w = w$.

   2° Jos $|v| = n+1 > 0$, niin v voidaan kirjoittaa muodossa $v = ua$, $u \in \Sigma^*, a \in \Sigma$, ja tällöin $v \circ w = u \circ aw$.

   Esimerkiksi olkoon $\Sigma = \{a, b\}, v = aba, w = bba$. Nyt

$$\begin{aligned} v \circ w &= aba \circ bba \\ &= ab \circ abba \\ &= a \circ babba \\ &= e \circ ababba = ababba \end{aligned}$$

7. Tehtävässä täytyy todistaa, että mikäli merkkijono käännetään kaksi kertaa ympäri, tuloksena on alkuperäinen merkkijono. Todistus on yksinkertaisinta suorittaa induktiolla, ja siinä käytetään apuna oppikirjassa todistettua lausetta $(wx)^R = x^R w^R$.

   1° Perustapaus: $|w| = 0$, $(e^R)^R = e$ (määritelmän mukaan $e^R = e$).

   2° Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee kaikille $|w| \leq n, n > 0$.

   3° Induktioaskel: Olkoon $|w| = n+1$. Nyt w voidaan kirjoittaa muotoon $w = ua$, $a \in \Sigma, u \in \Sigma^*, |u| = n$.

$$\begin{aligned} (w^R)^R &= ((ua)^R)^R \\ &= (au^R)^R \\ &= (u^R)^R(a)^R \text{ kirjan lauseen perusteella} \\ &= (u^R)^R(ea)^R \\ &= (u^R)^R(ae^R) \\ &= (u^R)^R a \\ &= ua = w \text{ induktio-oletuksen perusteella} \end{aligned}$$

   Rivillä neljä lisättiin a:n eteen tyhjä merkkijono e, koska sanan kääntämistä ei ole määritelty erikseen yhden kirjaimen mittaisille sanoille.

8. Formaali aakkosto Σ on äärellinen joukko symboleita. Esimerkkejä ovat tavalliset aakkoset $\{a, b, \ldots, z\}$ tai binäärinen aakkosto $\{0, 1\}$. Yleensä aakkostoissa käytetään numeroita ja kirjaimia, mutta mitä tahansa symboleita voi käyttää.

   Merkinnällä Σ^* tarkoitetaan kaikkia merkkijonoja, jotka voidaan muodostaa käyttämällä aakkoston symboleita, tyhjä sana mukaanluettuna. Esim. jos $\Sigma = \{a, b\}$, niin $\Sigma^* = \{e, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$. Mikäli Σ ei ole tyhjä, on Σ^* ääretön.

   Formaali kieli L voi olla mikä tahansa Σ^*:n ääretön tai äärellinen osajoukko. Yleisesti merkitään $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ toteuttaa ehdon } P\}$, eli sana w kuuluu kieleen, mikäli se toteuttaa jonkin ehdon P.

   a) Joukkoon $L = \{w \mid \text{jollekin } u \in \Sigma\Sigma, w = uu^R u\}$ kuuluvat kaikki kuusi kirjainta pitkät sanat, joiden kaksi ensimmäistä kirjainta ovat samat kuin kaksi viimeistä ja keskellä ovat samat merkit toisinpäin. Merkintä $u \in \Sigma\Sigma$ tarkoittaa kaikkia kaksikirjaimisia sanoja.

      Kieleen kuuluvat esimerkiksi sanat *abbaab* ($u = ab$) ja *aaaaaa* ($u = aa$). Sitävastoin $w = abbbba$ ei kuulu. Koska kahden merkin mittaisia sanoja on äärellinen määrä, on kielikin äärellinen.

   b) Kieleen $L = \{w \mid ww = www\}$ kuuluu ainoastaan tyhjä sana e. Ehdon mukaan $2|w| = 3|w|$, joka toteutuu vain kun $|w| = 0$, eli $w = e$.

   c) Kieleen $L = \{w \mid \text{jollekin } u, v \in \Sigma^*, uvw = wvu\}$ kuuluvat kaikki sanat, sillä jos valitaan $u = v = e$ niin $e \circ e \circ w = w = w \circ e \circ e$ ja ehto toteutuu.

   d) Kieleen $L = \{w \mid \text{jollekin } u \in \Sigma^*, www = uu\}$ kuuluvia sanoja ovat esimerkiksi *aa* (vastaava $u = aaa$) ja *aaaa* (vastaava $u = aaaaaa$). Sitävaston *ab* ei kuulu.