**Tik-79.148** **Kevät 2001**
**Tietojenkäsittelyteorian perusteet**
**Laskuharjoitus 11**
**Tehtävät**

**Tavalliset tehtävät:**

1. Määritellään funktio $odd : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seuraavasti:
$$odd(n) = \begin{cases} 0 & , n \text{ on parillinen} \\ 1 & , n \text{ on pariton} \end{cases}$$
Osoita, että $odd(n)$ on primitiivirekursiivinen.

2. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ primitiivirekursiivinen funktio. Osoita, että funktio $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
$$F(n) = f(f(f(\cdots f(n)\cdots))),$$
missä $f$ on komposoitu itsensä kanssa $n$ kertaa, on primitiivirekursiivinen.

3. Osoita, että funktio
$$prime(n) = \begin{cases} 1 & , n \text{ on alkuluku} \\ 0 & , \text{muulloin} \end{cases}$$
on $\mu$-rekursiivinen.

   Todistuksessa voi olla apua seuraavista oppikirjassa primitiivirekursiivisiksi todistetuista funktioista:
$$iszero(n) = \begin{cases} 0 & , n > 0 \\ 1 & , n = 0 \end{cases} \qquad n \sim m = \begin{cases} n - m & , n > m \\ 0 & , n \leq m \end{cases}$$
   Lisäksi luonnollisten lukujen yhteenlasku, kertolasku ja vertaaminen tiedetään primitiivirekursiivisiksi.

**Demonstraatiotehtävät:**

4. Osoita, että funktio $f$ on primitiivirekursiivinen, kun $f(n)$ on $n+1$:s pariton luonnollinen luku.

5. Määrittele kahden luonnollisen luvun jakojäännöksen laskeminen $\mu-$rekursiivisena funktiona. Käytä vastauksessasi rajoitettua minimointia.

6. Olkoon $\Delta = \{a, b, c\}, \beta = 4$ ja
$$d_1 = a, \quad d_2 = b, \quad d_3 = c$$
   a) Mikä on merkkijonon $abc$ Gödel-numero järjestelmässä?
   b) Mitä merkkijonoa Gödel-numero 19 vastaa?

7. (*haastava*) Suunnatun graafin $G = (V, E)$ *ydin* on solmujoukko $K \subseteq V$ siten, että
   (a) Kaikille $v, u \in K$, kaari $(u, v) \notin E$ ja
   (b) Kaikille $v \notin K$ on olemassa $u \in K$ siten, että $(u, v) \in E$.

   Osoita, että graafin ytimenlöytämisongelma on NP-täydellinen.