

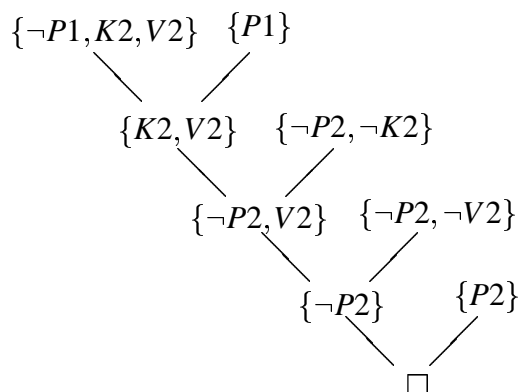
1. Taannoin tutustuimme insinööri Sörsselssönin laatimaan spesifikaatioon yksisuuntaisen risteyksen liikennevaloille. Muunna lauseet klausuulimuotoon ja osoita resoluutiolla, että liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaista.

Ratk.

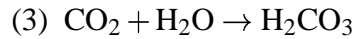
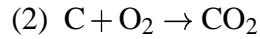
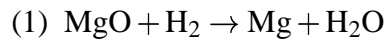
Muunnetaan lauseet konjunkttiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause	Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$	$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi \equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$ $\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi \equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki \equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2) \equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2) \equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1) \equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$	$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli \square tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:



2. Laaditaan asiantuntijajärjestelmä, jolla on tarkoitus tutkia, mitkä kemialliset reaktiot ovat mahdollisia. Tarkastellaan reaktioita:



- a) Esitä ylläolevat reaktiot lauselogiikan avulla klausuulimuodossa. Lisää klausuulijoukkoon tieto siitä, että aluksi saatavilla on aineita: MgO, H₂, O₂ ja C.
- b) Osoita resoluutiolla, että yllä olevassa tilanteessa on mahdollista saada reaktiotuotteena H₂CO₃:a.

Ratk.

Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$\begin{aligned} & \text{MgO} + \text{H}_2 \rightarrow \text{Mg} + \text{H}_2\text{O} \\ \implies & \text{MgO} \wedge \text{H}_2 \rightarrow \text{Mg} \wedge \text{H}_2\text{O} \\ \implies & \neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee (\text{Mg} \wedge \text{H}_2\text{O}) \\ \implies & (\neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee \text{Mg}) \wedge (\neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee \text{H}_2\text{O}) \end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg \text{MgO}, \neg \text{H}_2, \text{Mg}\}$ sekä $\{\neg \text{MgO}, \neg \text{H}_2, \text{H}_2\text{O}\}$.

(2)

$$\begin{aligned} & \text{C} + \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 \\ \implies & \text{C} \wedge \text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 \\ \implies & \neg \text{C} \vee \neg \text{O}_2 \vee \text{CO}_2 \\ \implies & \{\neg \text{C}, \neg \text{O}_2, \text{CO}_2\} \end{aligned}$$

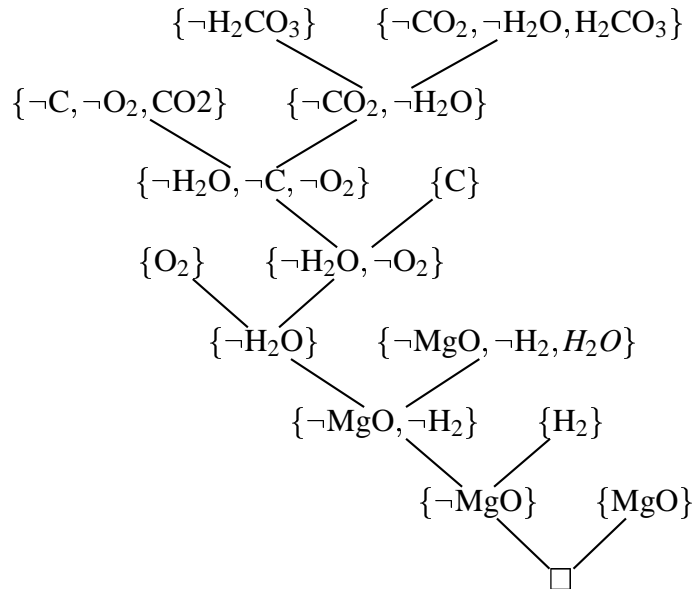
(3)

$$\begin{aligned} & \text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \implies & \text{CO}_2 \wedge \text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \implies & \neg \text{CO}_2 \vee \neg \text{H}_2\text{O} \vee \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \implies & \{\neg \text{CO}_2, \neg \text{H}_2\text{O}, \text{H}_2\text{CO}_3\} \end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned} & \text{MgO} \wedge \text{H}_2 \wedge \text{O}_2 \wedge \text{C} \\ \implies & \{\text{MgO}\}, \{\text{H}_2\}, \{\text{O}_2\}, \{\text{C}\} \end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuulijoukkoa Σ . Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \text{H}_2\text{CO}_3$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg\text{H}_2\text{CO}_3\}$ on toteutumaton:



4. Konstruoi deterministinen Turing-kone, joka laskee syötteenä annetun binääriluvun seuraajan.

Ratk.

Esitetty ratkaisu on otettu C. Papadimitrioun kirjasta “Computational Complexity”. Deterministinen Turingin kone on siis nelikko $\langle A, S, s_0, t \rangle$, missä

- A on aakkosto,
- S on tilajoukko,
- $t : S \times A \rightarrow S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$ tilansiirtofunktio ja
- $s_0 \in S$ alkutila.

Binääriluvun seuraajan laskevalle koneelle $S = \{s\}, A = \{0, 1\}$, $s_0 = s$ ja siirtofunktio on luettavissa seuraavasta taulukosta:

$p \in S$	$\sigma \in A$	$t(p, \sigma)$
s	0	$(h, 1, -)$
s	1	$(s, 0, \rightarrow)$
s	\sqcup	$(h, 1, -)$
s	\triangleright	$(s, \triangleright, \rightarrow)$

Syötteellä 1101 kone laskee seuraavasti: $(s, \triangleright, 1101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 0, 101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 00, 01) \xrightarrow{M} (h, \triangleright 001, 1)$. Se siis siirtyy oikealle muuttaen ykkösiä nolliksi kunnes se kohtaa ensimmäisen nollan, jonka se muuttaa ykköseksi ja pysähtyy. Jos luvun kaikki numerot ovat ykkösiä, niin ne muutetaan nolliksi, kunnes kohdataan tyhjä merkki nauhan lopussa, jonka paikalle laitetaan ykkönen.

5. Osoita, että graafin 3-väritys kuuluu luokkaan **NP** redusoidulla se lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi.

Ratk.

Tehtävänannossa pyydetään siis osoittamaan, että graafin 3-väritys ei ole vaikeampi ongelma kuin **NP**:ssä olevat. Itse ongelma on se, että voidaanko annetun graafin G solmut värjätä 3 värillä siten, että millään kahdella solmulla, joita yhdistää kaari, ei ole samaa väriä.

Olkoon graafin solmujen joukko $N = \{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ja kaarien joukko $E \subseteq N^2$ (kaaret siis solmupareja). Käännettäessä ongelmaa lauselogiikkaan, otettakoon käyttöön kullekin noodille atomilauseet R, G, B kuvaamaan, että solmu on punainen, vihreä tai sininen. Siis esim R_{n_1} tarkoittaa, että solmu n_1 on punainen.

Ensin tulee todeta, että jokaisella solmulla on väri ja että kaikilla se on uniikki. Tämän voi tehdä seuraavasti:

$$(R_n \vee G_n \vee B_n) \wedge (R_n \rightarrow (\neg G_n \wedge \neg B_n)) \wedge (G_n \rightarrow (\neg R_n \wedge \neg B_n)) \wedge (B_n \rightarrow (\neg R_n \wedge \neg G_n))$$

Kaarella yhdistettyjen solmujen sama väri estetään kirjoittamalla seuraava kaava kaikille $(n, m) \in E$:

$$(R_n \rightarrow \neg R_m) \wedge (G_n \rightarrow \neg G_m) \wedge (B_n \rightarrow \neg B_m)$$

Koko käännös on edellä mainittujen elementtien konjunktio ja sillä on malli joss graafilla on 3-väritys. (todistus sivuutetaan)