T-79.144 **Syksy 2004**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 10 (opetusmoniste, kappaleet 5.1 - 5.4)
16 – 19.11.2004

1. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x,y)$ = "solmusta x on kaari solmuun y" avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x,y) =$ "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0,1,2,\ldots,k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \quad \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{}} \quad b \quad \longrightarrow \quad c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x,x) \wedge R_3(x,c)).$$

Ratk.

a) Määritellään predikaatit $R_n(x,y)$ seuraavasti:

$$\begin{gathered}
\forall x R_0(x,x) \\
\forall x \forall y \forall z(R_0(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_1(x,z)) \\
\forall x \forall y \forall z(R_1(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_2(x,z)) \\
\vdots \\
\forall x \forall y \forall z(R_{k-1}(x,y) \wedge K(y,z) \rightarrow R_k(x,z))
\end{gathered}$$

Säännöt siis tarkoittavat, että kaikista solmuista on nollan askeleen mittainen reitti itseensä, ja mikäli solmusta x on $k-1$:n askeleen mittainen reitti solmuun y ja solmusta y on kaari solmuun z, voidaan kyseinen kaari liittää reitin jatkoksi ja saada k:n askeleen reitti solmusta x solmuun z.

Graafi:

$$a \quad \overset{\longrightarrow}{\underset{\longleftarrow}{}} \quad b \quad \longrightarrow \quad c$$

voidaan esittää kaarirelaation avulla seuraavasti:

$$K(a,b)$$
$$K(b,a)$$
$$K(b,c)$$

b) Ennen taulutodistuksen laadintaa kannattaa miettiä, mitä kysely tarkoittaa, ja tekemällä todistuksen sen pohjalta. Kyselyssä väitetään, että on olemassa solmu, josta lähtee kahden askeleen mittainen silmukka takaisin itseensä, ja josta pääsee kolmella askeleella solmuun c. Tarkastelemalla graafia huomataan, että solmu b täyttää tämän ehdon. Todistus etenee siten seuraavasti:

1. Todistetaan, että solmusta b on yhden askeleen pituinen reitti solmuun a.
2. Todistetaan, että solmusta b on kahden askeleen pituinen reitti takaisin itseensä.
3. Todistetaan, että solmusta b on kolmen askeleen pituinen reitti solmuun c.

Mikäli tätä strategiaa ei noudata, todistuksesta voi tulla huomattavan hankala.

1. $T(\forall x R_0(x,x))$

2. $T(\forall x \forall y \forall z (R_0(x,y) \land K(y,z) \to R_1(x,z)))$

3. $T(\forall x \forall y \forall z (R_1(x,y) \land K(y,z) \to R_2(x,z)))$

4. $T(\forall x \forall y \forall z (R_2(x,y) \land K(y,z) \to R_3(x,z)))$

5. $T(K(a,b))$

6. $T(K(b,a))$

7. $T(K(b,c))$

8. $E(\exists x (R_2(x,x) \land R_3(x,c)))$

9. $E(R_2(b,b) \land R_3(b,c))$, 8. x/b

10. $T(R_0(b,b) \land K(b,a) \to R_1(b,a))$, 2. $x/b, y/b, z/a$

11. $E(R_0(b,b) \land K(b,a))$, 10. 11. $T(R_1(b,a))$, 10.

12. $E(R_0(b,b))$, 11. 12. $E(K(b,a))$, 11.

$\otimes$

13. $T(R_0(b,b))$, 1.

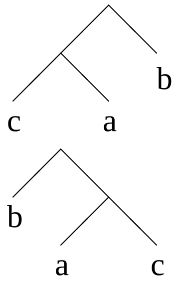
$\otimes$

Tarkastellaan asemointisyistä alipuuta solmusta 11 erikseen.

- 11. $T(R_1(b,a))$
  - 12. $T(R_1(b,a) \wedge K(a,b) \to R_2(b,b))$, 3. $x/b, y/a, z/b$
    - 13. $E(R_1(b,a) \wedge K(a,b))$, 12.
      - 12. $E(R_1(b,a))$, 13. $\otimes$
      - 12. $E(K(a,b))$, 13. $\otimes$
    - 13. $T(R_2(b,b))$, 12.
      - 14. $T(R_2(b,b) \wedge K(b,c) \to R_3(b,c))$, 3. $x/b, y/b, z/c$
        - 15. $E(R_2(b,b) \wedge K(b,c))$, 14.
          - 16. $E(R_2(b,b))$, 15. $\otimes$
          - 16. $E(K(b,c))$, 15. $\otimes$
        - 15. $T(R_3(b,c))$, 14.
          - $E(R_2(b,b))$, 9. $\otimes$
          - $E(R_3(b,c))$, 9. $\otimes$

Koko taulu saatiin ristiriitaikseksi ja looginen seuraavuus täten osoitettua.

2. Esitetään binääripuut kaksipaikkaisen funktiosymbolin s (sisäsolmut) ja yksipaikkaisen funktiosymbolin l (lehtisolmut) avulla. Näin oheisen kuvan ylempi puu saa termiesityksen $s(s(l(c),l(a)),l(b))$.



a) Tarkoittakoon predikaatti PK(x,y), että binääripuu x on binääripuun y peilikuva. Määrittele predikaatti PK predikaattilogiikan lausein siten, että pystyt päättelemään, ovatko mitkä tahansa kaksi yllä annetun esitystavan mukaista binääripuuta toistensa peilikuvia.

b) Osoita semanttisella taululla, että ylempi binääripuu on alemman binääripuun peilikuva.

Ratk.
Määritellään predikaatti PK seuraavasti:

$$\forall x PK(l(x), l(x))$$
$$\forall x \forall y \forall v \forall w (PK(x,v) \land PK(y,w) \to PK(s(x,y), s(w,v)))$$

Siis:

- lehtisolmut ovat itsensä peilikuvia
- sisäsolmut $s(x,y)$ käsitellään siten, että ensin muodostetaan alipuiden x ja y peilikuvat ja sitten nämä liitetään yhteen käänteiseen järjestykseen $s(w,v)$.

Todistetaan näillä lauseilla, että:

$$PK(s(s(l(c), l(a)), l(b)), s(l(b), s(l(a), l(c))))$$

Havaitaan, että puusta (seuraavalla sivulle) tulee ristiriitainen, joten esitetty lause on PK:n määritelmän looginen seuraus.

$$T\forall x PK(l(x),l(x))$$

$$T\forall x\forall y\forall z\forall v(PK(x,y)\land PK(z,v)\to PK(s(x,z),s(v,y)))$$

$$EPK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c))))$$

$$TPK(l(a),l(a))$$

$$TPK(l(b),l(b))$$

$$TPK(l(c),l(c))$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),y)\land PK(z,v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\land PK(z,v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),z),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T\forall v(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\land PK(l(b),v)\to PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(v,s(l(a),l(c)))))$$

$$T(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\land PK(l(b),l(b))\to PK(s(s(l(c),l(a)),l(b)),s(l(b),s(l(a),l(c)))))$$

$$E(PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c)))\land PK(l(b),l(b))) \qquad TPK(s(s(l(c),l(a)),\underset{\otimes}{l(b)}),s(l(b),s(l(a),l(c))))$$

$$EPK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))) \qquad EPK(\underset{\otimes}{l(b)},l(b))$$

$$T\forall y\forall z\forall v(PK(l(c),y)\land PK(z,v)\to PK(s(l(c),z),s(v,y)))$$

$$T\forall z\forall v(PK(l(c),l(c))\land PK(z,v)\to PK(s(l(c),z),s(v,l(c))))$$

$$T\forall v(PK(l(c),l(c))\land PK(l(a),v)\to PK(s(l(c),l(a)),s(v,l(c))))$$

$$T(PK(l(c),l(c))\land PK(l(a),l(a))\to PK(s(l(c),l(a)),s(l(a),l(c))))$$

$$E(PK(l(c),l(c))\land PK(l(a),l(a))) \qquad TPK(s(l(c),\underset{\otimes}{l(a)}),s(l(a),l(c)))$$

$$EPK(\underset{\otimes}{l(c)},l(c)) \qquad EPK(\underset{\otimes}{l(a)},l(a))$$

3. Kvanttorilla $\exists! x$ tarkoitetaan, että "on olemassa vain yksi x". Väittämä $\exists! x\, \phi(x)$ voidaan ilmaista predikaattilogiikan lauseella

$$(\exists x \phi(x)) \wedge (\forall x \forall y (\phi(x) \wedge \phi(y) \rightarrow x = y)).$$

Formalisoi seuraavat lauseet predikaattilogiikalla:

1.	On vain yksi kuuraparta.
2.	Kaikki joulupukit ovat kuurapartoja.
3.	Kaikki kuuraparrat ovat joulupukkeja.
4.	On vain yksi joulupukki.

Osoita semanttisella taululla, että lause 4 on lauseiden 1-3 looginen seuraus.

Ratk.
Tarkoittakoon predikaatti $K(x)$, että x on kuuraparta ja predikaatti $J(x)$, että x on joulupukki. Näistä lähtökohdista lauseet voidaan formalisoida seuraavasti:

- $\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \rightarrow x = y)$
- $\forall x (J(x) \rightarrow K(x))$
- $\forall x (K(x) \rightarrow J(x))$

Kysely on luonnollisesti muotoa:

$$\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \rightarrow x = y)$$

Todistus semanttisella taululla on seuraava:

$$1.\ T(\exists x K(x) \wedge \forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \rightarrow x = y))$$

$$2.\ T(\forall x (J(x) \rightarrow K(x)))$$

$$3.\ T(\forall x (K(x) \rightarrow J(x)))$$

$$4.\ E(\exists x J(x) \wedge \forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \rightarrow x = y))$$

$$5.\ T(\exists x K(x)),\ 1.$$

$$6.\ T(\forall x \forall y (K(x) \wedge K(y) \rightarrow x = y))$$

$$7.\ E(\exists x J(x)) \qquad 7.\ E(\forall x \forall y (J(x) \wedge J(y) \rightarrow x = y))$$

$$8.\ T(K(a)),\ 5.\ x/a \qquad 8.\ E(\forall y (J(b) \wedge J(y) \rightarrow b = y)),\ 7.\ x/b$$

$$9.\ E(J(a)),\ 7.\ x/a \qquad 9.\ E(J(b) \wedge J(c) \rightarrow b = c),\ 8.\ y/c$$

$$10.\ T(K(a) \rightarrow J(a)), 3. \qquad 10.\ T(J(b) \wedge J(c))$$

$$11.\ E(K(a))\ \otimes \qquad 11.\ T(J(a))\ \otimes \qquad 11.\ E(b = c)$$

$$12.\ T(J(b))$$

$$13.\ T(J(c))$$

$$14.\ T(K(b) \wedge K(c) \rightarrow b = c),\ 6.\ x/b, y/c$$

$$15.\ E(K(b) \wedge K(c)) \qquad 15.\ T(b = c)\ \otimes$$

$$16.\ E(K(b)) \qquad 16.\ E(K(c)$$

$$17.\ T(J(b) \rightarrow K(b)), 2.\ x/b \qquad 17.\ T(J(c) \rightarrow K(c)), 3.\ x/c$$

$$18.\ E(J(b))\ \otimes \qquad 18.\ T(K(b))\ \otimes \qquad 18.\ E(J(c))\ \otimes \qquad 18.\ T(K(c))\ \otimes$$