T-79.144 **Syksy 2005**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8
(opetusmoniste, kappaleet 2.3 - 3.4)
2.11. - 5.11.2005

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ (joukko U on struktuurin $\mathcal{S}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{S}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi U kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{S}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{S}} \subset U^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

2. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x (P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg \forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

3. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y (\exists x P(x,y) \rightarrow \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y (\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y))$.

b) $\exists x \forall y R(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y))$.

d) $\neg (\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

4. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ voidaan tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $Q\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \to \psi)$

b) $Q\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \to \psi)$

c) $Q\vec{y}\ (\phi \to \forall x \psi(x))$

d) $Q\vec{y}\ (\phi \to \exists x \psi(x))$

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x,y)$,

c) $\neg\forall y \exists x G(x,y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$.