T-79.144 **Syksy 2003**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6 (opetusmoniste, kappaleet 7.4 - 8.3)
14 – 17.10.2003

1. Taannoin tutustuimme insinööri Sörsselssönin laatimaan spesifikaatioon yksisuuntaisen risteyksen liikennevaloille. Muunna lauseet klausuulimuotoon ja osoita resoluutiolla, että liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

Ratk.
Muunnetaan lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$ $\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli $\Box$ tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\{\neg P1, K2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{P1\} \arrow[dl, dash] & & & & \\
& \{K2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P2, \neg K2\} \arrow[dl, dash] & & & \\
& & \{\neg P2, V2\} \arrow[dr, dash] & & \{\neg P2, \neg V2\} \arrow[dl, dash] & & \\
& & & \{\neg P2\} \arrow[dr, dash] & & \{P2\} \arrow[dl, dash] & \\
& & & & \Box & &
\end{tikzcd}
$$

2. Laaditaan asiantuntijajärjestelmä, jolla on tarkoitus tutkia, mitkä kemialliset reaktiot ovat mahdollisia. Tarkastellaan reaktioita:

(1) $MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O$

(2) $C + O_2 \rightarrow CO_2$

(3) $CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3$

a) Esitä ylläolevat reaktiot lauselogiikan avulla klausuulimuodossa. Lisää klausuulijoukkoon tieto siitä, että aluksi saatavilla on aineita: MgO, H_2, O_2 ja C.

b) Osoita resoluutiolla, että yllä olevassa tilanteessa on mahdollista saada reaktiotuotteena H_2CO_3:a.

Ratk.
Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$\begin{aligned}
&MgO + H_2 \rightarrow Mg + H_2O \\
\Longrightarrow &MgO \wedge H_2 \rightarrow Mg \wedge H_2O \\
\Longrightarrow &\neg MgO \vee \neg H_2 \vee (Mg \wedge H_2O) \\
\Longrightarrow &(\neg MgO \vee \neg H_2 \vee Mg) \wedge (\neg MgO \vee \neg H_2 \vee H_2O)
\end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg MgO, \neg H_2, Mg\}$ sekä $\{\neg MgO, \neg H_2, H_2O\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&C + O_2 \rightarrow CO_2 \\
\Longrightarrow &C \wedge O_2 \rightarrow CO_2 \\
\Longrightarrow &\neg C \vee \neg O_2 \vee CO_2 \\
\Longrightarrow &\{\neg C, \neg O_2, CO_2\}
\end{aligned}$$

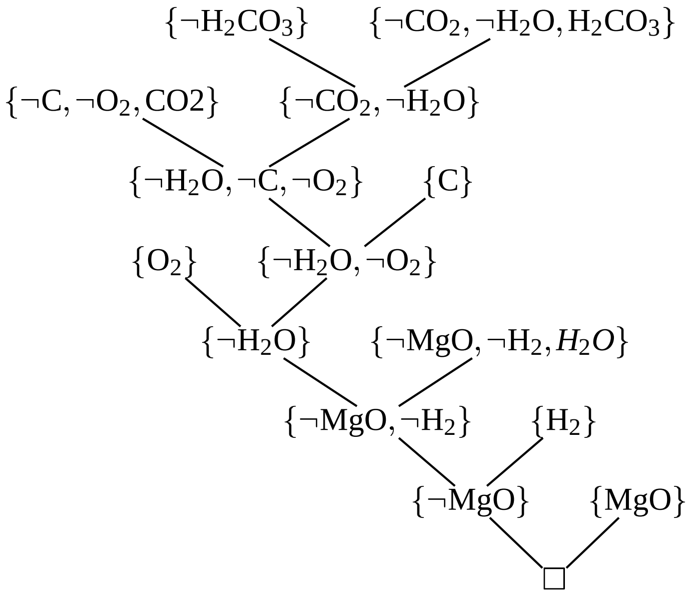
(3)

$$\begin{aligned}
&CO_2 + H_2O \rightarrow H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &CO_2 \wedge H_2O \rightarrow H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &\neg CO_2 \vee \neg H_2O \vee H_2CO_3 \\
\Longrightarrow &\{\neg CO_2, \neg H_2O, H_2CO_3\}
\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned}
&MgO \wedge H_2 \wedge O_2 \wedge C \\
\Longrightarrow &\{MgO\}, \{H_2\}, \{O_2\}\{C\}
\end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuulijoukkoa Σ. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models H_2CO_3$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg H_2CO_3\}$ on toteutumaton:



4. Konstruoi deterministinen Turing-kone, joka laskee syötteenä annetun binääriluvun seuraajan.

Ratk.
Esitetty ratkaisu on otettu C. Papadimitrioun kirjasta “Computational Complexity”. Deterministinen Turingin kone on siis nelikko $\langle A, S, s_0, t\rangle$, missä

- A on aakkosto,
- S on tilajoukko,
- $t : S \times A \to S \times A \times \{\to, \leftarrow, \downarrow\}$ tilansiirtofunktio ja
- $s_0 \in S$ alkutila.

Binääriluvun seuraajan laskevalle koneelle $S = \{s\}, A = \{0, 1\}$, $s_0 = s$ ja siirtofunktio on luettavissa seuraavasta taulukosta:

$p \in S$	$\sigma \in A$	$t(p, \sigma)$
s	0	$(h, 1, -)$
s	1	$(s, 0, \to)$
s	$\sqcup$	$(h, 1, -)$
s	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \to)$

Syötteellä 1101 kone laskee seuraavasti: $(s, \triangleright, 1101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 0, 101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 00, 01) \xrightarrow{M} (h, \triangleright 001, 1)$. Se siis siirtyy oikealle muuttaen ykkösiä nolliksi kunnes se kohtaa ensimmäisen nollan, jonka se muuttaa ykköseksi ja pysähtyy. Jos luvun kaikki numerot ovat ykkösiä, niin ne muutetaan nolliksi, kunnes kohdataan tyhjä merkki nauhan lopussa, jonka paikalle laitetaan ykkönen.

5. Osoita, että graafin 3-väritys kuuluu luokkaan **NP** redusoimalla se lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi.

Ratk.
Tehtävänannossa pyydetään siis osoittamaan, että graafin 3-väritys ei ole vaikeampi ongelma kuin **NP**:ssä olevat. Itse ongelma on se, että voidaanko annetun graafin G solmut värjätä 3 värillä siten, että millään kahdella solmulla, joita yhdistää kaari, ei ole samaa väriä.

Olkoon graafin solmujen joukko $N = \{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ ja kaarien joukko $E \subseteq N^2$ (kaaret siis solmupareja). Käännettäessä ongelmaa lauselogiikkan, otettakoon käyttöön kullekin noodille atomilauseet R, G, B kuvaamaan, että solmu on punainen, vihreä tai sininen. Siis esim R_{n_1} tarkoittaa, että solmu n_1 on punainen.

Ensin tulee todeta, että jokaisella solmulla on väri ja että kaikilla se on uniikki. Tämän voi tehdä seuraavasti:

$$
\begin{aligned}
&(R_n \vee G_n \vee B_n) \wedge (R_n \to (\neg G_n \wedge \neg B_n)) \wedge \\
&(G_n \to (\neg R_n \wedge \neg B_n)) \wedge (B_n \to (\neg R_n \wedge \neg G_n))
\end{aligned}
$$

Kaarella yhdistettyjen solmujen sama väri estetään kirjoittamalla seuraava kaava kaikille $n, m \in V$:

$$
(R_n \to \neg R_m) \wedge (G_n \to \neg G_m) \wedge (B_n \to \neg B_m)
$$

Koko käännös on edellä mainittujen elementtien konjunktio ja sillä on malli joss graafilla on 3-väritys. (todistus sivuutetaan)