T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 1 (kurssin esitiedot)
18 – 21.9.2002

1. Osoita induktiolla, että n-alkioisella joukolla on 2^n osajoukkoa ?

Ratk.
Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen $0 \in \mathbb{N}$) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi $2^0 = 1$.

Induktio-oletus: Päteköön periaate n-alkioisille joukoille.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa, jossa on $n+1$ alkiota. Valitaan joukosta mielivaltainen alkio a. Tarkasteltavan joukon osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa a on mukana, joukkoon A ja osajoukkojen, joissa sitä ei ole mukana, joukkoon B. Joukkoa B voidaan tarkastella n-alkioisen joukon osajoukkojen joukkona. Näitä on induktio-oletuksen perusteella 2^n. Toisaalta, jokainen A alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi B:n alkioksi (poistamalla a) ja näin siis $|A| = |B|$. Joukkoja on siis yhteensä $2 * 2^n = 2^{n+1}$.

2. Osoita induktioperiaatteen ja täydellisen induktion ekvivalenssi ?

Ratk.
Kysymyksessä pitää siis osoittaa, että jos jotain voi todistaa tavallisen induktion avulla niin saman asian voi todistaa täydellisellä induktiolla ja päinvastoin.

($\Rightarrow$) Jos ominaisuuden P voi todistaa tavallisella induktiolla, riittää $P(n+1)$:n todistamiseksi se, että $P(n)$ pätee. Täydellisen induktion vahvempi induktio-oletus pitää sisällään myös tapauksen n.

($\Leftarrow$) Jos ominaisuus P on todistettu vahvalle induktiolla, sen voi todistaa tavallisella induktiolla siten, että ominaisuus muuttuu muotoon $Q(n) = \forall m \leq n : P(m)$. Tällöin pitää siis todistaa $Q(n+1)$ ja todeta, että siitä seuraa $P(n+1)$. Perustapaus redusoituu kuitenkin samaksi, $P(0) \Leftrightarrow Q(0)$.

3. Todista seuraavat lauseet:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

b) $E - (A \cap B) = (E - A) \cup (E - B)$.

Ratk.
Todistus tapahtuu nk. Vennin digrammeilla. Tässä tapauksessa tulee piirtää kolme lomittain menevää vapaamuotoista suljettua kuviota ja merkitä niihin A, B ja C. Todistus etenee värjäämällä kuvioita lauseiden perusteella sisimmistä operaatioista alkaen. Mikäli operaatio on unioni $\cup$, värjätään alue, jossa riittää, että jompikumpi operandeista on edustettuna. Leikkauksessa $\cap$ tulee luonnollisesti olla molemmat. Komplementti $-$ sisältää universumin kaikki muut alkiot.

4. Olkoon R refleksiivinen relaatio. Osoita, että $R \subseteq A \times A$ on ekvivalenssirelaatio jos ja vain jos kaikilla $a \in A, b \in A, c \in A$,
$\langle a, b \rangle \in R$ ja $\langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle c, a \rangle \in R$?

Ratk.
($\Rightarrow$, vain jos) Ekvivalenssirelaatio edellytti symmetrisyyttä, refleksivisyyttä ja transitiivisuutta. Transitiivisuus ilmaistaan kaavalla muodossa: kaikilla $a \in A, b \in A, c \in A$ $\langle a, b \rangle \in R$ ja $\langle b, c \rangle \in R \Rightarrow \langle a, c \rangle \in R$. Symmetrisyys taas : kaikilla $a \in A, b \in A, \langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$. Näistä kahdesta seuraa tehtävän ominaisuus. Lisäksi R todettiin tehtävänannossa refleksiiviseksi.

($\Leftarrow$, jos). Pitää osoittaa, että jos tehtävän ominaisuus pätee, syntynyt relaatio on refleksiivinen, transitiivinen ja symmetrinen. Refleksiivisyys todetaan tehtävänannossa. Symmetrisyys voidaan todistaa refleksiivisyyden ja annetun ominaisuuden avulla seuraavasti: kaikille $a \in A, b \in A, \langle a, a \rangle \in R, \langle a, b \rangle \in R \Rightarrow \langle b, a \rangle \in R$. Toisaalta symmetrisyydestä ja annetusta ominaisuudesta seuraa transitiivisuus ja ekvivalenssirelaation ehdot on täytetty.

5. Anna esimerkkejä *relaatioista* ihmisten joukossa, jotka ovat:

a) refleksiivisiä.
Ratk. olla yhtä vanha.

b) irrefleksiivisiä.
Ratk. vanhempi-relaatio $\langle a, b \rangle$: a on b:n isä.

c) symmetrisiä.
Ratk. ystävä, yhtä-vanha.

d) transitiivisia.
Ratk. pidempi kuin, vanhempi kuin.

6. Anna esimerkkejä *funktioista* ihmisten joukosta mahdollisesti joihinkin muihin joukkoihin, jotka ovat:

a) injektiivisiä.
Ratk.
$f : I \to S$, kuvaus henkilöltä hänen sosiaaliturvatunnukselleen. Jokaisella on niitä vain yksi eikä kahdella henkilöllä ole samaa. Kuvaus ei kuitenkaan ole surjektio koska, esim. huomenna syntyville on jo tunnukset varattu.

b) surjektiivisia.
Ratk.
$f : I \to N$, kuvaus ihmisiltä esim. kalenterin nimistöön, joka toimitetaan ottamalla henkilön etunimi. Näitä on jokaisella vain yksi ja nimistön kaikilla nimillä on joukko sen nimisiä ihmisvastineita. Jos henkilön etunimi ei ole nimistössä voidaan kuvaksi sopia miehen tapauksessa “Matti” ja naisen “Marja”, jotka siellä lienevät.

c) bijektioita.
Ratk.
Patologinen esimerkki on minä-funktio, joka kuvaa henkilön itselleen. Toinen voisi olla esim. oikea peukaloni, kullakin niitä on vain yksi ja jokainen oikea peukalo on jonkun.

T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 2 (opetusmoniste, kappaleet 1.1 - 1.5)
25 – 28.9.2002

1. Ilmaise seuraavat väittämät lauselogiikalla:

a) En saa työtä valmiiksi, ellet sinä auta.

b) Ei tippa tapa eikä ämpäriin huku.

c) Kuljen työmatkat jalan, pyörällä tai joskus autolla.

d) Merja ja Arto tulevat meille kylään.

e) Koska olet ollut ilkeä, et saa jälkiruokaa.

f) Vaikka manuaali olikin pitkä, se tuntui loppuvan kesken.

g) Jos minulta kysytään — tai vaikkei kysyttäisikään — niin hänen ei kannata ostaa autoa, tai sitten hänen on asuttava kaukana työpaikastaan ja bensiinin on tultava halvemmaksi.

Ratk:

a) $\neg A \to \neg B$, kun
$A =$ ”Sinä autat”
$B =$ ”Saan työn valmiiksi”

b) $\neg A \wedge \neg B$, kun
$A =$ ”Tippa tappaa”
$B =$ ”Ämpäriin hukkuu”

c) $A \vee B \vee C$, kun
$A =$ ”Kuljen työmatkat jalan”
$B =$ ”Kuljen työmatkat pyörällä”
$C =$ ”Kuljen työmatkat joskus autolla”

d) Joko: A, kun
$A =$ ”Merja ja Arto tulevat meille kylään”
tai: $A \wedge B$, kun
$A =$ ”Merja tulee meille kylään”
$B =$ ”Arto tulee meille kylään”

e) Esim. $A \to \neg B$ tai $A \wedge \neg B$, kun
$A =$ ”Olet ollut ilkeä”
$B =$ ”Saat jälkiruokaa”

f) Esim. $A \wedge B$, kun
$A =$ ”Manuaali oli pitkä”
$B =$ ”Manuaali tuntui loppuvan kesken”

g) $A \vee \neg A \to \neg B \vee (C \wedge D)$, kun
$A =$ ”Minulta kysytään”
$B =$ ”Hänen kannattaa ostaa auto”
$C =$ ”Hänen on asuttava kaukana työpaikastaan”
$D =$ ”Bensiinin on tultava halvemmaksi”

2. Olkoon atomisten lauseiden joukko $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$. Mitkä seuraavista ovat lauselogiikan lauseita. Perustele.

a) A
Ratk. Kyllä, atominen laus

b) $\neg(A \wedge B))$
Ratk. Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Myös, ei ole parillista määrää sulkuja.

c) $(A \wedge (B \to (A \wedge C)))$
Ratk. Kyllä, vastauksesi voinee antaa jäsennyspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.

d) Tänään sataa.
Ratk. Ei, luonnollista kieltä.

3. Todista että sulkujen määrä jokaisessa lauselogiikan lauseessa on parillinen.

Ratk. Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan n konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkeita.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta f, jossa on $n+1$ konnektiivia. Lauseen muoto on tällöin yksi seuraavista: $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ tai $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Nyt α ja β ovat lauseita, joissa on korkeintaan n konnektiivia. Induktio-oletuksen mukaan α ja β sisältävät parillisen määrän sulkeita. Näin ollen lause f sisältää myös parillisen määrän sulkeita.

4. Poista tarpeettomat sulut ilman, että lauseen merkitys muuttuu.

a) $(A \to ((B \wedge C) \vee D))$
b) $(((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C))$
c) $((A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D)))$
d) $((\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((B \to C) \wedge A))$
e) $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \to \neg(A \vee B))$

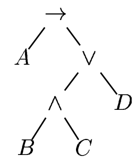
Ratk. Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

a) $A \to (B \wedge C) \vee D$
b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
c) $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$
d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \to C) \wedge A$
e) $\neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$

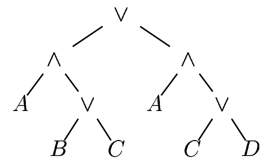
5. Mitä muotoa edellisen tehtävän lauseet ovat. Anna niille jäsennyspuut.

Ratk. Muoto määraytyy uloimmasta konnektiivista:

a) Implikaatio.



b) Implikaatio.
c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.
e) Implikaatio.

◊ **6.** Olkoon lauselogiikan lauseille annettu leksikografinen järjestys, jossa on aluksi atomiset lauseet, tämän jälkeen niiden negaatiot, joita seuraavat binäärikonnektiivit jossain järjestyksessä. Esim. atomilauseiden joukolla $\{A\}$ järjestys voisi olla $A, \neg A, (A \vee A), (A \wedge A), (A \to A)$, $(A \leftrightarrow A), (A \vee \neg A), \ldots$ Osoita, että mitkä tahansa kaksi eri lauselogiikan lausetta voidaan järjestelmällä aidosti järjestää.

7. Toteuta lauselogiikan lauseille jäsennin (engl. parser).

a) Olettaen, että sulkuja ei jätetä pois.
b) Kaikkia sulkusääntöjä sovelletaan.

8. Anna allaolevan lauseen alilauseet ja laadi sille totuustaulukko.

$$(\neg A \to (\neg B \to C)) \to (\neg(\neg A \to B) \to C)$$

Ratk. Leveysuuntaisella haulla saadaan: $\neg A \to (\neg B \to C)$, $\neg(\neg A \to B) \to C$, $\neg A$, $\neg B \to C$, $\neg(\neg A \to B)$, C, A, $\neg B$, $\neg A \to B$, B. Lisäksi tietysti lause itse. Totuustaulukon laatiminen on ilmeistä (2^3 riviä ja alilauseiden osoittama määrä sarakkeita).

9. Määrittele lauselogiikan konnektiivit

a) aina epätoden lauseen ($\perp$) ja implikaation ($\rightarrow$) avulla.
Ratk.
$\neg A \equiv A \rightarrow \perp$
$A \vee B = \neg A \rightarrow B \equiv (A \rightarrow \perp) \rightarrow B$
$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B) = \neg(A \rightarrow \neg B) = \neg(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \equiv$
$(A \rightarrow (B \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$
$A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A \equiv$
$((A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow \perp)) \rightarrow \perp$

b) Shefferin viivan (opetusmoniste kappale 2.2) avulla. **Ratk.**
$\neg A \equiv (A \mid A)$
$A \wedge B = \neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$
$A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = (\neg A \mid \neg B) \equiv (A \mid A) \mid (B \mid B)$
$A \rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B) = (A \mid \neg B) \equiv (A \mid (B \mid B))$
$A \leftrightarrow B = A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A = (A \mid (B \mid B)) \wedge (B \mid (A \mid A)) \equiv$
$((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A))) \mid ((A \mid (B \mid B)) \mid (B \mid (A \mid A)))$

T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 3 (opetusmoniste, kappaleet 2.1 - 2.4)
2 – 5.10.2002

1. Olkoon $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{P}$ ja $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{P}$ kaksi totuusjakelua ja $\phi \in \mathcal{L}$ lause. Osoita, että jos $\mathcal{A}_1 \cap At(\phi) = \mathcal{A}_2 \cap At(\phi)$, niin $\mathcal{A}_1 \models \phi \Longleftrightarrow \mathcal{A}_2 \models \phi$.

Ratk.
Todistus rakenteellisella induktiolla:
Perustapaus: Olkoon ϕ atominen lause. Tällöin joukko-opillisen leikkauksen määritelmän perusteella joko $\phi \in \mathcal{A}_1$ ja $\phi \in \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \models \phi$. Toinen vaihtoehto on, että $\phi \notin \mathcal{A}_1$ ja $\phi \notin \mathcal{A}_2$ jolloin $\mathcal{A}_1 \not\models \phi$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \phi$. Näin ollen ekvivalenssi pätee.

Induktio-oletus: Pätekööön väittämä rakenteen kompleksisuuteen n asti. (n voi olla esim. konnektiivien lkm.).

Induktioaskel: Tapausanalyysi eri konnektiivien suhteen.

1. Olkoon lause muotoa $\neg\alpha$. Induktio-oletuksen perusteella väittämä pätee lauseelle α. Nyt jos $\mathcal{A}_1 \models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \not\models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \neg\alpha$. Edelleen, jos $\mathcal{A}_1 \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \not\models \alpha$ niin $\mathcal{A}_1 \models \neg\alpha$ ja $\mathcal{A}_2 \models \neg\alpha$. Näin alkup. väittämän ekvivalenssi pysyy voimassa.
2. Olkoon lause muotoa $\alpha \wedge \beta$. Väittämä pätee oletuksen mukaan jälleen sekä α:lle että β:lle. Eri vaihtoehtoja tulee nyt 4. Oletetaan, että molemmat alilauseet ovat tosia molemmissa totuusjakeluissa. Tällöin myös alilauseiden konjunktio on tosi molemmissa ja ekvivalenssi säilyy. Muut tapaukset samaan tapaan (konjunktio epätosi molemmissa).
3. Muut konnektiivit niiden määritelmien mukaan.

2. Olkoon $\mathcal{A} = \emptyset$ totuusjakelu. Laske totuusmääritelmän nojalla allaolevan lauseen totuusarvo.

$$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$$

Ratk. Lause (merkitään sitä ϕ:llä) on muodoltaan implikaatio. Sovelletaan totuusmääritelmää:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} \models \phi & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models (\neg B \rightarrow \neg A) \text{ tai } \mathcal{A} \models ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B) \\ \mathcal{A} \not\models \neg B \rightarrow \neg A & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models \neg A. \\ \mathcal{A} \models \neg B & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models B \\ \mathcal{A} \not\models \neg A & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models A \end{array}$$

Nyt siis annetun totuusjakelun perusteella tiedetään, että $\mathcal{A} \not\models A$ ja $\mathcal{A} \not\models B$. Näinollen viimeinen rivi ei toteudu, toisen rivin "ja" ei toteudu ja 1. rivin "tai":n 1. argumentti on epätosi eli $\mathcal{A} \models (\neg B \rightarrow \neg A)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} \models ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B) & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models (\neg B \rightarrow A) \text{ tai } \mathcal{A} \models B \\ \mathcal{A} \not\models (\neg B \rightarrow A) & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \models \neg B \text{ ja } \mathcal{A} \not\models A \\ \mathcal{A} \models \neg B & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models B \end{array}$$

Tästä nähdään, että viimeinen rivi toteutuu, samoin toisen rivin "ja"-ehto, jolloin myös ensimmäisen rivin vasen sarake pitää paikkans eli $\mathcal{A} \models ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$. Seurauksena ensimmäisen taulukon ensimmäisen rivin oikean sarakkeen "tai"-ehdon jälkimmäinen argumentti pätee, ja siis myös vasen sarake, eli $\mathcal{A} \models \phi$.

Tämä esitystapa oli nk. top-down, monimutkaisemmasta yksinkertaiseen. Toinen vaihtoehto on bottom-up eli lähteä liikkeelle atomilauseista ja edetä monimutkaisempia rakenteita kohti.

3. Insinööri Sörsselssön laati seuraavat vaatimukset liikennevaloille kahden yksisuuntaisen kadun risteykseen:

(i) Kummassakin liikennevalossa on vihreä, keltainen ja punainen lamppu, joista täsmälleen yksi palaa kerrallaan.

(ii) Liikennevalojen vihreät lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

(iii) Jos toisessa liikennevalossa palaa punainen lamppu, niin toisessa palaa joko keltainen tai vihreä lamppu.

a) Esitä annetut vaatimukset lauselogiikan lauseina.

b) Laadi syntyneelle lausejoukolle totuustaulukko.

c) Hae taulukon avulla lausejoukolle malli / totuusjakelu, jossa se ei toteudu.

d) Mieti parannusehdotuksia annetuille vaatimuksille (ajatellen todellisia liikennevaloja). Mitä liikennevalojen ominaisuuksia et pysty kuvaamaan lauselogiikan avulla?

Ratk.

a) Käytetään atomisia lauseita $P1$, $K1$ ja $V1$, jotka tarkoittavat että liikennevalon 1 punainen, keltainen ja vihreä lamppu palaa (tässä järjestyksessä). Olkoot $P2$, $K2$ ja $V2$ vastaavat atomiset lauseet liikennevalolle 2. Käydään annetut vaatimukset lävitse:

(i) Liikennevalolle 1 saadaan lause $P1 \vee K1 \vee V1$ (ainakin yksi lampuista palaa) ja lauseet $P1 \rightarrow \neg K1 \wedge \neg V1$, $K1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg V1$, $V1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg K1$ (korkeintaan yksi lampuista palaa). Lisäksi tarvitaan vastaavat lauseet liikennevalolle 2.

(ii) Saadaan lause $\neg(V1 \wedge V2)$.

(iii) Saadaan lauseet $P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$ ja $P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$.

b) Laaditaan totuustaulu edellisen tehtävän lausejoukolle. Merkitään taulun tiivistämiseksi α_i:llä lausetta $(Pi \vee Ki \vee Vi) \wedge (Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi) \wedge (Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi) \wedge (Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki)$ (joka siis merkitsee, että liikennevalossa i palaa täsmälleen yksi lamppu). Tähdellä merkityt rivit vastaavat lausejoukon malleja.

P1	K1	V1	P2	K2	V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E	E	E	E	E	E	E	E	T	T	T	
E	E	E	E	E	T	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	E	E	T	T	T	T	
E	E	E	E	T	T	E	E	T	T	T	
E	E	E	T	E	E	E	T	T	T	E	
E	E	E	T	E	T	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	E	E	E	T	T	E	
E	E	E	T	T	T	E	E	T	T	E	
E	E	T	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	
E	E	T	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	E	T	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	E	T	T	E	T	T	E	E	T	T	
E	E	T	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	E	T	T	T	T	T	E	E	T	T	
E	T	E	E	E	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	E	E	T	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	E	T	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	E	E	T	T	T	T	T	*
E	T	E	T	E	T	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	E	T	E	T	T	T	
E	T	E	T	T	T	T	E	T	T	T	

P1K1V1P2K2V2	α_1	α_2	$\neg(V1 \wedge V2)$	$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	
E T T E E E	E	E	T	T	T	
E T T E E T	E	T	E	T	T	
E T T E T E	E	T	T	T	T	
E T T E T T	E	E	E	T	T	
E T T T E E	E	T	T	T	T	
E T T T E T	E	E	E	T	T	
E T T T T E	E	E	T	T	T	
E T T T T T	E	E	E	T	T	
T E E E E E	T	E	T	E	T	
T E E E E T	T	T	T	T	T	*
T E E E T E	T	T	T	T	T	*
T E E E T T	T	E	T	T	T	
T E E T E E	T	T	T	E	E	
T E E T E T	T	E	T	T	E	
T E E T T E	T	E	T	T	E	
T E E T T T	T	E	T	T	E	
T E T E E E	E	E	T	E	T	
T E T E E T	E	T	E	T	T	
T E T E T E	E	T	T	T	T	
T E T E T T	E	E	E	T	T	
T E T T E E	E	T	T	E	T	
T E T T E T	E	E	E	T	T	
T E T T T E	E	E	T	T	T	
T E T T T T	E	E	E	T	T	
T T E E E E	E	E	T	E	T	
T T E E E T	E	T	T	T	T	
T T E E T E	E	T	T	T	T	
T T E E T T	E	E	T	T	T	
T T E T E E	E	T	T	E	T	
T T E T E T	E	E	T	T	T	
T T E T T E	E	E	T	T	T	
T T E T T T	E	E	T	T	T	
T T T E E E	E	E	T	E	T	
T T T E E T	E	T	E	T	T	
T T T E T E	E	T	T	T	T	
T T T E T T	E	E	E	T	T	
T T T T E E	E	T	T	E	T	
T T T T E T	E	E	E	T	T	
T T T T T E	E	E	T	T	T	
T T T T T T	E	E	E	T	T	

Malleja on siis 7 kappaletta ($2^6 = 64$ mahdollisuutta). Tutkimalla malleja voit huomata, että insinööri Sörsselssönin vaatimukset täyttyvät niiden määräämissä tilanteissa. Väittämä ”liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti” voidaan esittää lauseena $\neg(P1 \wedge P2)$. Tämä lause on tosi kaikissa edellisen tehtävän lausejoukon malleissa (tarkista), joten $\neg(P1 \wedge P2)$ on kyseisen lausejoukon looginen seuraus.

c) Väittämästä ”molemmissa liikennevaloissa palaa keltainen lamppu” saadaan lause $K1 \wedge K2$. Olkoon $\mathcal{A}$ totuusjakelu, joka kuvaa atomiset lauseet $K1$ ja $K2$ todeksi (T) ja muut atomiset lauseet epätodeksi (E). Nyt $\mathcal{A}_1 \models (K1 \wedge K2)$, koska $\mathcal{A}_1 \models K1$ ja $\mathcal{A}_2 \models K2$). Lisäksi kaikille (a)-kohdan lauseille α pätee $\mathcal{A} \models \alpha$ (tarkista). Siis $\mathcal{A}_1$ on malli annetuille vaatimuksille, jossa $K1 \wedge K2$ on tosi. (Mallin haussa voidaan käyttää esimerkiksi semanttista taulua). Olkoon $\mathcal{A}_2$ valuaatio, joka kuvaa atomiset lauseet $V1$ ja $V2$ todeksi ja muut atomiset lauseet epätodeksi. Nyt $\mathcal{A}_2 \not\models \neg(V1 \wedge V2)$, joten lausejoukko ei toteudu.

d) Yksi mahdollisuus on väljentää ensimmäistä vaatimusta, koska liikkeellelähdettäessä punainen ja keltainen lamppu palavat monissa liikennevaloissa yhtäaikaisesti (mieti, kuinka lauseita tulee muuttaa). Lauselogiikan avulla ei voi helposti esittää liikennevalojen toiminnan eri vaiheita (esim. vihreän jälkeen syttyy keltainen lamppu).

4. Tutki totuustaulukoilla, pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa.

a) Lause $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$ on pätevä.

b) Lause $\neg((A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$ on toteutumaton.

c) Lauseet $A \leftrightarrow B$ ja $\neg(A \leftrightarrow \neg B)$ ovat loogisesti ekvivalentteja.

d) $\{(A \wedge B) \vee (C \wedge A), (A \wedge B) \vee \neg B\} \models A \vee (C \wedge \neg B)$.

Ratk.

a) Lauseen alilauseet ovat $A, B, C, A \rightarrow B, A \rightarrow C, B \rightarrow C$, $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$ sekä lause itse (merkitään sitä ϕ:llä). Lause on pätevä, joss ϕ saa taulukossa kaikilla totuusjakeluilla arvon tosi.

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \to C$	$(B \to C) \to (A \to C)$	ϕ
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	E	T	E	E	T	T
T	E	T	E	T	T	T	T
T	E	E	E	E	T	E	T
E	T	T	T	T	T	T	T
E	T	E	T	T	E	T	T
E	E	T	T	T	T	T	T
E	E	E	T	T	T	T	T

Viimeinen sarake sisältää pelkästään arvoa T, joten lause on pätevä.

c)

A	B	$A \leftrightarrow B$	$\neg A \leftrightarrow \neg B$
T	T	T	T
T	E	E	E
E	T	E	E
E	E	T	T

Taulukosta nähdään, että lauseiden $A \leftrightarrow B$ ja $\neg A \leftrightarrow \neg B$ sarakkeet ovat identtiset, joten ne ovat loogisesti ekvivalentit.

5. Osoita seuraavat loogisen seuraavuuden ominaisuudet.

a) $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

b) Monotonisuus: $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.

c) $\Sigma \models \phi \Rightarrow \mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathrm{Cn}(\Sigma \cup \{\phi\})$.

d) $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$.

Ratk.

a) Merkintä $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ tarkoitti lausejoukon Σ loogisten seurauksien joukkoa. Joukko muodostuu lauseista, jotka ovat tosia kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla kaikki Σ:n lauseet ovat tosia. Jos siis olisi $\Sigma \not\subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$, niin joukossa Σ olisi lause α ja lisäksi totuusjakelu, jolla kaikki Σ:n lauseet, siis myös α, olisivat tosia, ja α epätosi. Ilmeinen ristiriita.

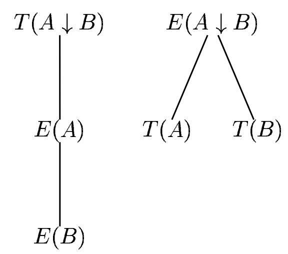
b) Tarkastellaan mieliv. lausetta $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_1)$. Tällöin α on tosi kaikilla niillä totuusjakeluilla, joilla Σ_1 lauseet ovat. Koska $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, niin myös Σ_2 mallit edellyttävät kaikkien Σ_1:n lauseiden toteutumista. Tällöin kaikilla Σ_2:n malleilla α on tosi ja $\alpha \in \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$.

Kiteyttäen voidaan todeta, että enemmän lauseita $\Rightarrow$ vähemmän malleja $\Rightarrow$ enemmän loogisia seurauksia.

6. Peircen nuoli määritellään seuraavasti:

$$(A \downarrow B) \Leftrightarrow_{def} \neg A \wedge \neg B.$$

Määrittele sille semanttisen taulun säännöt.



T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 4 (opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 4.5)
9 – 12.10.2002

1. Todista semanttisella taululla

a) $A \to (B \to B)$,

b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$,

c) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ ja

d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$.

Todistettavien kaavojen negaatioille konstruoidaan semanttiset taulut. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

Huoma, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat menevät ristiriitaisikei lauseella $\neg\phi$ ei ole mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

Ratk.

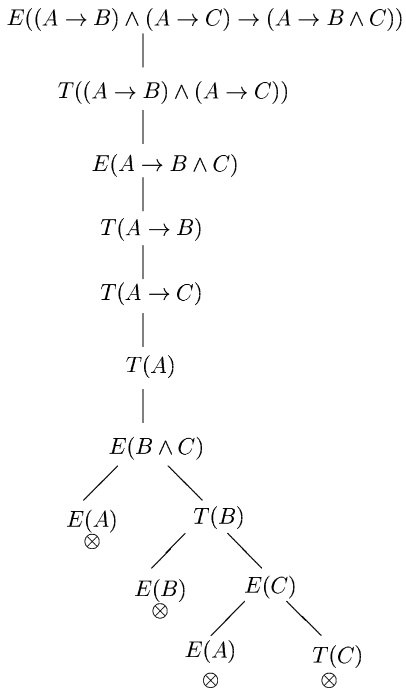
a) $A \to (B \to B)$:

$$
\begin{array}{c}
E(A \to (B \to B)) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(B \to B) \\
| \\
T(B) \\
| \\
E(B) \\
\otimes
\end{array}
$$

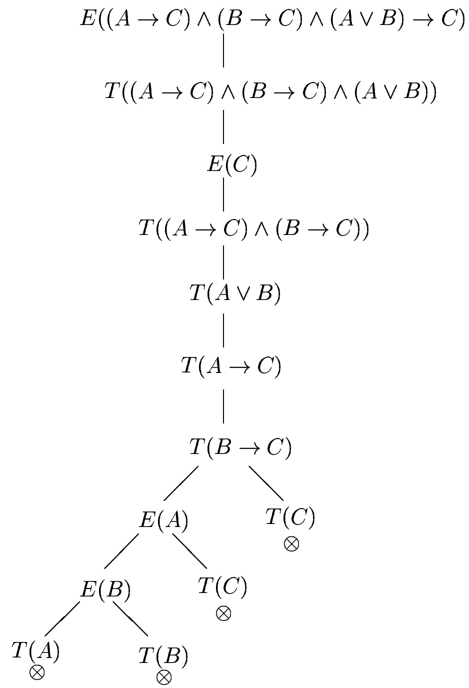
b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$:

$$
\begin{array}{c}
E((A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)) \\
| \\
T((A \to B) \wedge (B \to C)) \\
| \\
E(A \to C) \\
| \\
T(A \to B) \\
| \\
T(B \to C) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(C) \\
\begin{array}{cc}
/ & \backslash \\
\begin{array}{c} E(A) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(B) \\ \begin{array}{cc} / & \backslash \\ \begin{array}{c} E(B) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(C) \\ \otimes \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

c) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$:



d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$:



2. Tutki semanttisella taululla, pitääkö annettu väittämä paikkansa. Jos ei, anna perusteluksi totuusjakelu, jossa se ei ole tosi (vastaesimerkki).

a) $\{B \to A, C \to B, (C \to A) \to D\} \models D$

b) $\{A \to C, A \vee B, \neg D \to \neg B\} \models C \to D$

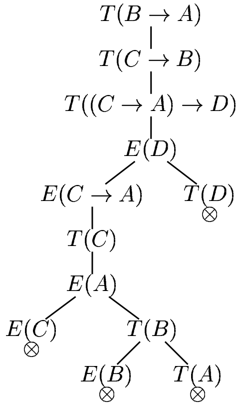
c) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$

d) $\models (\neg B \to (A \to C)) \to (A \to (B \vee C))$

Ratk.

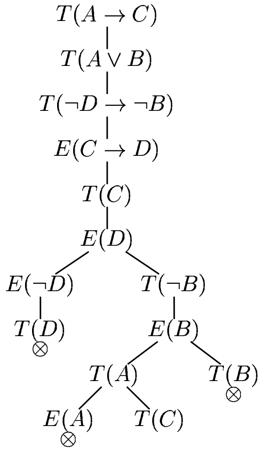
Loogista seuraavuutta tutkittaessa asetetaan taulun juureen kaikki lausejoukon lauseet totena ja tutkittava lause epätotena. Mikäli nyt kaikki puun haarat sulkeutuvat ristiriidan takia, tiedetään että tutkittava lause ei voi olla epätosi, mikäli kaikki lausejoukon lauseet ovat tosia, joten lause on looginen seuraavuus lausejoukosta.

a)



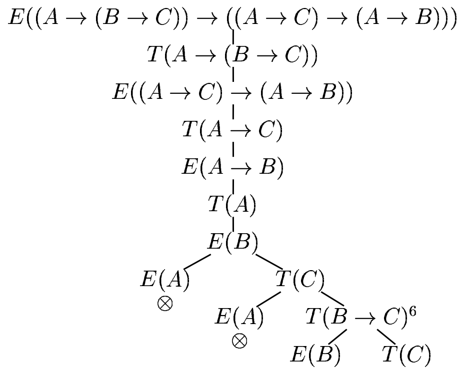
Koska taulu sulkeutui, on D looginen seuraus lausejoukosta.

b)



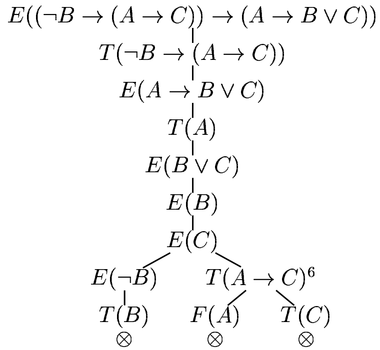
Taulu ei sulkeutunut, joten $C \to D$ ei ole looginen seuraavuus lausejoukosta. Puun aukiolevasta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki, saadaan totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

c) **Ratk.** Merkintä $\models \phi$ tarkoittaa siis, että lause ϕ on pätevä. Todistus siis tapahtuu konstruoimalla puu, jonka juuressa on lauseen negaatio.



Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä. Vastamalli voidaan lukea avoimesta haarasta, tässä tapauksessa esim. oikeimmasta saadaan totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

d) **Ratk.**



Taulu sulkeutui, joten lause on pätevä.

4. Mallinna lauselogiikalla kolmen äänestäjän äänestysjärjestelmää, jonka malleista joko positiivinen (enemmistö jaa-ääniä) tai negatiivinen äänestystulos voidaan lukea. Kuinka malli muuttuu, jos äänestäjiä on neljä ja tasatuloksen sattuessa puheenjohtajan ääni ratkaisee.

Ratk.

Tarkoitus on siis laatia lausejoukko, joiden malleista äänestyksen tulos voidaan päätellä. Liitettäköön ensimmäisessä tapauksessa mainittuun kolmeen äänestäjään atomilauseet A, B ja C. Jos A on tosi, niin ensimmäinen äänestäjä antaa jaa-äänen jne. Malliin tarvitaan lisäksi atomilause, vaikkapa Y, joka kertoo äänestyksen tuloksen.

Näillä edellytyksillä sopiva mallinnus voisi olla vaikkapa seuraava:

$$\begin{array}{ccc} A \wedge B \to Y & A \wedge C \to Y & B \wedge C \to Y \\ \neg A \wedge \neg B \to \neg Y & \neg A \wedge \neg C \to \neg Y & \neg B \wedge \neg C \to \neg Y \end{array}$$

Mallinnuksen järkevyyttä voi tutkia valitsemalla joitakin äänestystuloksia. Oletetaan esimerkiksi, että C äänestää JAA ja muut ei. Äänestyksen tulos pitäisi olla ei eli totuusjakelun $\mathcal{A} = \{C\}$ lausejoukon malli. Näin onkin, sillä ainoastaan implikaation $\neg A \wedge \neg B \to \neg Y$ vasen puoli evaluoituu todeksi. Samasta syystä totuusjakelu $\mathcal{A}' = \{C, Y\}$ johtaisi ristiriitaan.

Kun mukaan otetaan puheenjohtaja erään mallinnuksen voisi toteuttaa seuraavaan tapaan. Otetaan mukaan bitti (atomilause) IC tarkoittamaan ei täysin ratkennutta äänestystulosta (inconclusive).

$$A \wedge B \wedge C \to Y \quad \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \to \neg Y$$

$$\begin{array}{ccc} A \wedge \neg B \wedge \neg C \to IC & \neg A \wedge B \wedge \neg C \to IC & \neg A \wedge \neg B \wedge C \to IC \\ A \wedge B \wedge \neg C \to IC & A \wedge \neg B \wedge C \to IC & \neg A \wedge B \wedge C \to IC \end{array}$$

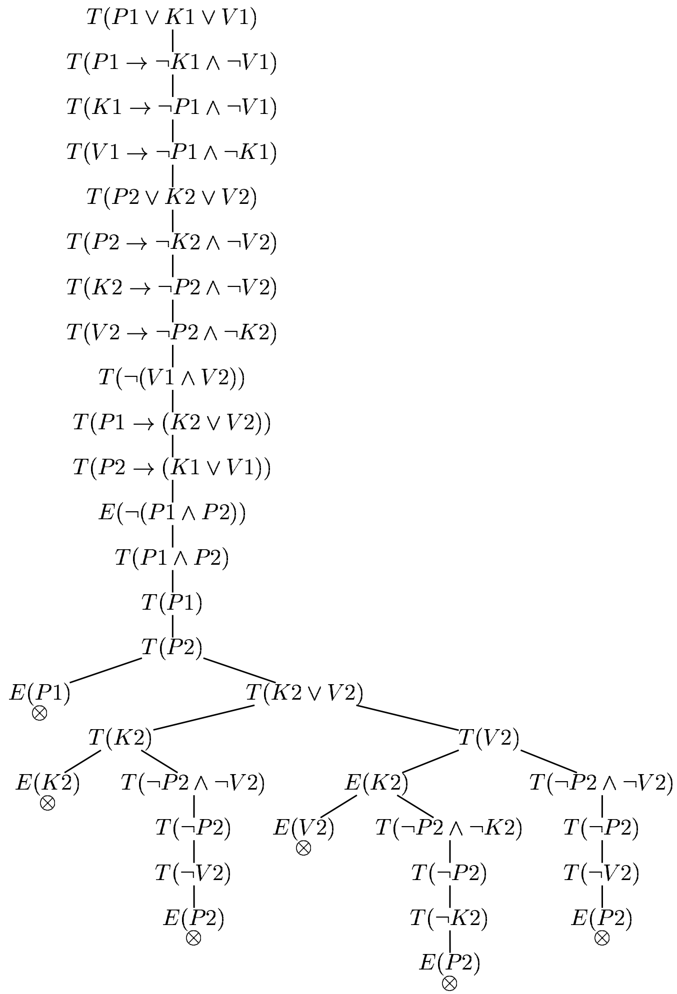
$$IC \wedge P \to Y \quad IC \wedge \neg P \to \neg Y$$

Tarkastellaan esimerkkinä tapausta, jossa A ja puheenjohtaja P antavat JAA-äänen. Tällöin kahden ensimmäisen implikaation vasen puoli evaluoituu epätodeksi ja lauseet siten tosiksi. Implikaation $A \wedge \neg B \wedge \neg C \to IC$ vasen puoli evaluoituu todeksi, jolloin IC pitää ottaa mukaan totuusjakeluun. Koska P siis oli totta, niin lauseen $IC \wedge P \to Y$ perusteella äänestystulos on positiivinen, lopullisen totuusjakelun ollessa $\mathcal{A} = \{A, P, IC, Y\}$. Todetaan lisäksi, että muut lauseet eivät aiheuta ristiriitaa.

Mallinnuksessa on luonnollisesti vaihtoehtona myös kaikkien kombinaatioiden luettelointi.

5. Palataan insinööri Sörsselssönin laatimiin vaatimuksiin liikennevaloille yksisuuntaisten katujen risteyksessä. Osoita semanttisella taululla, että väittämä "liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti" seuraa loogisesti laatimastasi lausejoukosta.

Ratk.



T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 5 (opetusmoniste, kappaleet 4.4 - 6.4)
16 – 19.10.2002

1. Osoita Hilbertin ja Suppesin todistusjärjestelmillä (opetusmoniste, kappaleet 5.1 ja 5.2) seuraavat väittämät.

a) $\vdash P \to P$
Ratk. (Hilbert)

1.	$(P \to ((P \to P) \to P))$	[A1]
2.	$((P \to ((P \to P) \to P)) \to$ $((P \to (P \to P)) \to (P \to P)))$	[A2]
3.	$((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	[MP:1,2]
4.	$(P \to (P \to P))$	[A1]
5.	$(P \to P)$	[MP:3,4]

(Suppes)

1.	P	[apuoletus]
2.	$\neg\neg P$	[KNT]
3.	P	[KNE]
4.	$P \to P$	[ET:1,3]

b) $\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$
Ratk. (Hilbert)

1.	$(Q \to R)$	[P2]
2.	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	[A1]
3.	$(P \to (Q \to R))$	[MP:1,2]
4.	$((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	[A2]
5.	$((P \to Q) \to (P \to R))$	[MP:3,4]
6.	$(P \to Q)$	[P1]
7.	$(P \to R)$	[MP:5,6]

(Suppes)

1.	$P \to Q$	[P1]
2.	$Q \to R$	[P2]
3.	P	[apuoletus]
4.	Q	[MP:3,2]
5.	R	[MP:4,3]
6.	$P \to R$	[ET:3,5]

c) $\{P, Q \to (P \to R)\} \vdash Q \to R$
Ratk. (Hilbert)

1.	P	[P1]
2.	$(Q \to (P \to R))$	[P2]
3.	$(P \to (Q \to P))$	[A1]
4.	$(Q \to P)$	[MP:1,3]
5.	$((Q \to (P \to R)) \to ((Q \to P) \to (Q \to R)))$	[A2]
6.	$((Q \to P) \to (Q \to R))$	[MP:2,5]
7.	$(Q \to R)$	[MP:4,6]

(Suppes)

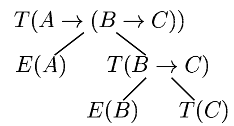
1.	P	[P1]
2.	$Q \to (P \to R)$	[P2]
3.	Q	[apuoletus]
4.	$P \to R$	[MP:3,2]
5.	R	[MP:1,4]
6.	$Q \to R$	[ET:3,5]

2. Hae seuraavien lauseiden disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto (1) muunnossääntöjä käyttäen ja (2) semanttisen taulun avulla.

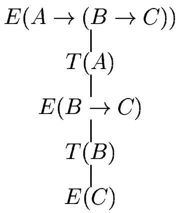
a) $A \to (B \to C)$
Ratk. Poistetaan lauseesta ensin implikaatiot.

$$
\begin{aligned}
A \to & (B \to C) \\
& \equiv \neg A \lor (\neg B \lor C) \\
& \equiv \neg A \lor \neg B \lor C
\end{aligned}
$$

Näin syntynyt muoto on sekä konjunktiivinen että disjunktiivinen normaalimuoto. Haettaessa disjunktiivista normaalimuotoa semanttisen taulun avulla lähdetään liikkeelle solmusta, jossa lause esiintyy totetena:



Nyt avoimista haaroista saadaan luettua disjunktit. Tässä tapauksessa niissä kussakin on vain 1 literaali. Saadaan siis $\neg A \lor \neg B \lor C$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjunktiivinen normaalimuoto haetaan taulusta, jossa juurena on lause epätotena:



Avoimesta haarasta saadaan lause $A \land B \land \neg C$, josta saadaan negatoimalla ja De Morganin sääntöä soveltamalla muoto $\neg A \lor \neg B \lor C$, joka on haluttu normaalimuoto.

b) $\neg A \leftrightarrow ((A \lor \neg B) \to B)$
Ratk. Poistetaan lauseesta ensin ekvivalenssi ja implikaatiot:

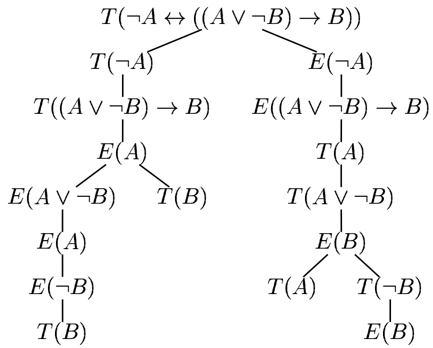
$$\begin{aligned}
&\neg A \leftrightarrow ((A \lor \neg B) \to B)\\
&\quad\equiv (\neg A \to ((A \lor \neg B) \to B)) \land (((A \lor \neg B) \to B) \to \neg A)\\
&\quad\equiv (A \lor (\neg(A \lor \neg B) \lor B)) \land (\neg(\neg(A \lor \neg B) \lor B) \lor \neg A)\\
&\quad\equiv (A \lor ((\neg A \land B) \lor B)) \land (((A \lor \neg B) \land \neg B) \lor \neg A)\\
&\quad\equiv (A \lor ((\neg A \lor B) \land (B \lor B))) \land ((A \lor \neg B \lor \neg A) \land (\neg B \lor \neg A))\\
&\quad\equiv (A \lor \neg A \lor B) \land (A \lor B) \land (A \lor \neg A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)\\
&\quad\equiv (A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)
\end{aligned}$$

Tämä on konjunktiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli, jolloin päädytään muotoon:

$$\begin{aligned}
&(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B)\\
&\quad\equiv (A \land (\neg A \lor \neg B)) \lor (B \land (\neg A \lor \neg B))\\
&\quad\equiv (A \land \neg A) \lor (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B) \lor (B \land \neg B)\\
&\quad\equiv (A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)
\end{aligned}$$

Viimeisessä vaiheessa on käytetty sievennyssääntöjä, joissa moninkertaiset esiintymät samassa konjunktissa on eliminoitu samoin kuin konjuntit, joissa on esiintynyt sekä literaali, että sen komplementti.

Tarkastelu tauluilla:



Taulusta avoimia haaroja lukemalla saadaan muoto $(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$, joka on sama kuin muunnossäännöillä. Konjuntiivinen normaalimuoto samalla periaatteella kuin a-kohdassa.

c) $\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C)$

$$\begin{aligned}
&\neg((A \leftrightarrow \neg B) \to C)\\
&\qquad\equiv \neg((A \to \neg B) \land (\neg B \to A) \to C) && [\leftrightarrow e]\\
&\qquad\equiv \neg(\neg((\neg A \lor \neg B) \land (\neg\neg B \lor A)) \lor C) && [\to e]\\
&\qquad\equiv (\neg A \lor \neg B) \land (A \lor B) \land \neg C \ (*) && [\neg\neg e, DM]
\end{aligned}$$

Tämä onkin jo konjuntiivinen normaalimuoto. Käytetään seuraavaksi konjunktion distributiivisuutta disjunktion yli:

$$\begin{aligned}
(*) &\equiv (\neg A \lor \neg B) \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C))\\
&\equiv (\neg A \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C))) \lor\\
&\qquad (\neg B \land ((B \land \neg C) \lor (A \land \neg C)))\\
&\equiv (\neg A \land B \land \neg C) \lor (\neg A \land A \land \neg C) \lor\\
&\qquad (\neg B \land B \land \neg C) \lor (\neg B \land A \land \neg C)\\
&\equiv (\neg A \land B \land \neg C) \lor (A \land \neg B \land \neg C)
\end{aligned}$$

Lause on disjunktiivisessa normaalimuodossa. Viimeisessä vaiheessa on jätetty loogisesti epätodet literaalien konjuktiot pois (ts. ne, joissa esiintyy jokin atominen lause ja sen negaatio).

d) $P_1 \land P_2 \leftrightarrow (P_1 \to P_2) \lor (P_2 \to P_3)$

Ratk.
Tehtävän laadinnassa kävi sikäli mielenkiintoisesti, että ekvivalenssin oikealla puolella oleva termi on pätevä. Nyt analyysi voidaan tehdä, korvaamalla se aina todella lauseella $\top$. Saadaan:

$$
\begin{aligned}
&P_1 \wedge P_2 \leftrightarrow \top \\
&\quad \equiv (P_1 \wedge P_2 \to \top) \wedge (\top \to P_1 \wedge P_2) \\
&\quad \equiv (\neg(P_1 \wedge P_2) \vee \top) \wedge (\neg\top \vee (P_1 \wedge P_2)) \\
&\quad \equiv (\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \top) \wedge (\bot \vee P_1) \wedge (\bot \vee P_2) \\
&\quad \equiv P_1 \wedge P_2
\end{aligned}
$$

Nyt sievennyssäänntöjä voi soveltaa siten, että ensimmäinen konjunkti on aina tosi ja kahdessa viimeisessä ensimmäiset termit voi poistaa, koska ne ovat aina epätosia. Syntynyt tulos on sekä KNM että DNM.

4. Hae KNM:t seuraaville lauseille muunnossäännöillä ja semantisella taululla.

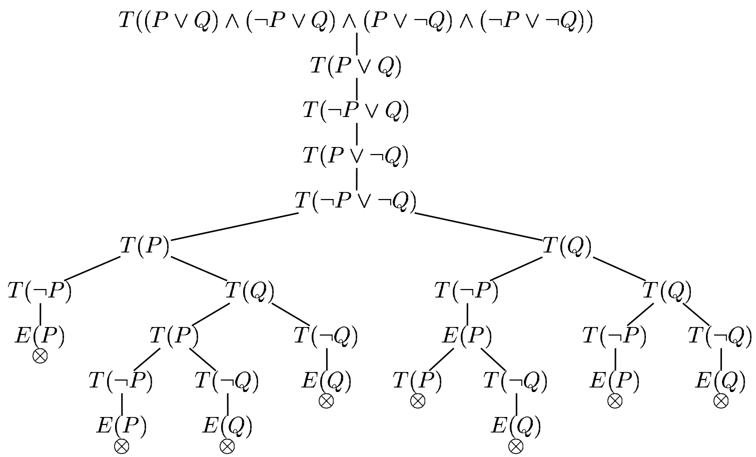
a) $(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q)$
Ratk. Muuntamisessa käytetään disjunktion distributiivisuutta konjunktion yli:

$$
\begin{aligned}
&(P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg Q) \\
&\quad \equiv ((P \wedge \neg P) \vee Q) \wedge ((P \wedge \neg P) \vee \neg Q) \\
&\quad \equiv (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)
\end{aligned}
$$

b) $(P_1 \wedge \neg P_1) \vee \cdots \vee (P_n \wedge \neg P_n)$
Ratk. Muuntaminen etenee samoilla säännöillä. Kuten a)-kohdassakin, lopputulokseen tulevat kaikki kombinaatiot (2^n) totuusarvoille:

$$
\begin{aligned}
&(P_1 \wedge \neg P_1) \ldots (P_n \wedge \neg P_n) \\
&\quad \equiv (P_1 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n) \wedge (\neg P_1 \vee \cdots \vee \neg P_n)
\end{aligned}
$$

c) Osoita semanttisella taululla, että a)-kohdassa muodostettu KNM on toteutumaton.
Ratk. Osoittaminen tapahtuu lähtemällä liikkeelle semanttisesta taulusta, jonka juuressa on lause todeksi asetettuna. Jos lause on toteutumaton, taulu on ristiriitainen.



5. Hae lauseelle $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ klausuuliesitys.

Ratk. Lähdetään poistamaan implikaatiot:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (A \to ((A \to A) \to A)) & \to & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(A \to ((A \to A) \to A)) & \vee & ((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee ((A \to A) \to A)) & \vee & ((\neg A \vee (A \to A)) \to (A \to A)) \\
\equiv & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}
$$

Edelleen viedään negaatiot atomilauseiden eteen:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \neg(\neg A \vee (\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & (\neg(\neg A \vee (\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (\neg\neg A \wedge \neg(\neg(\neg A \vee A) \vee A)) & \vee & ((\neg\neg A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge (\neg\neg(\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge \neg(\neg A \vee A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A))
\end{array}
$$

Siirretään distribuutiosäännöillä disjunktiot sisään ja konjunktiot ulos:

$$
\begin{array}{rlcl}
 & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \wedge (A \wedge \neg A)) \vee (\neg A \vee A)) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \vee (\neg A \vee A)) \wedge ((A \wedge \neg A) \vee (\neg A \vee A))) \\
\equiv & (A \wedge ((\neg A \vee A) \wedge \neg A)) & \vee & ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A))
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (A \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \wedge \\
&\quad (\neg A \vee A) \wedge \neg A) \vee ((A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee \neg A \vee A)) \\
&\equiv (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
&\quad (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
&\quad (\neg A \vee A \vee \neg A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge (\neg A \vee A \vee \neg A \vee A) \wedge \\
&\quad (\neg A \vee \neg A \vee \neg A \vee A)
\end{aligned}$$

Kun tulokseen sovelletaan normaalimuotojen sievennyssääntöä, jossa poistetaan disjunktiot, joissa esiintyy literaali ja sen komplementti, havaitaan, että kaikki syntyneet 9 klausuulia eliminoituvat. Tuloksena saatava klausuulijoukko on siis tyhjä ($\emptyset$), ja on siten aina tosi. Tämä korreloi hienosti sen kanssa, että annettu lause on pätevä (voi tarkistaa esim. semanttisella taululla).

T-79.144 Syksy 2002
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 6 (opetusmoniste, kappaleet 6.5 - 7.4)
16 – 19.10.2002

1. Tarkastellaan klausuulijoukkoa:

$$\begin{aligned}
S \;=\; &\{\{A_0, A_1\}, \{\neg A_0, \neg A_1\}, \{A_1, A_2\}, \{\neg A_1, \neg A_2\}, \ldots, \\
&\{A_{n-1}, A_n\}, \{\neg A_{n-1}, \neg A_n\}, \{A_n, A_0\}, \{\neg A_n, \neg A_0\}\}
\end{aligned}$$

Anna totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models S$.

Ratk.
Tarkastellaan joukon S kahta ensimmäistä klausuulia. Ne voidaan kaavana kirjoittaa muodossa $(A_0 \vee A_1) \wedge (\neg A_0 \vee \neg A_1)$. Tällä lauseella on mallit $\mathcal{A}_1 = \{A_0\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A_1\}$, eli se kuvaa ehdoton tai operaatiota (XOR). Näin ollen koko joukko kuvaa kaavaa:

$$(A_0 \veebar A_1) \wedge (A_1 \veebar A_2) \wedge \cdots \wedge (A_n \veebar A_0)$$

Tarkastellaan kaavaa n:n kahdella arvolla. Kun $n = 1$ lause saa muodon $(A_0 \veebar A_1) \wedge (A_1 \veebar A_0)$. Kun tässä valitaan A_0 todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi. Nyt molemmat konjunktit toteutuvat. Vastaavasti kun valitaan A_0 epätodeksi.

Nyt jos $n = 2$, kaava on muotoa $(A_0 \veebar A_1) \wedge (A_1 \veebar A_2) \wedge (A_2 \veebar A_0)$. Jos tässä valitsee A_0:n todeksi, seuraa siitä, että A_1 on epätosi ja taas A_2 tosi. Nyt viimeinen ehdoton tai kuitenkin edellyttäisi toteutuakseen, että A_0 on epätosi. Tämä aiheuttaa ristiriidan ja näin ei saada mallia. Jos A_0 valittiin aluksi epätodeksi, syntyy samanlainen ristiriita. Näin ollen tässä tapauksessa joukolla ei ole mallia.

Tarkastelun voi yleistää siten, että jos n on pariton saadaan edellämainitulla tekniikalla 2 mallia ja jos n on parillinen, ei malleja ole.

2. Horn-klausuuli on klausuuli, jossa on täsmälleen yksi positiivinen literaali. Olkoon $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ Horn-klausuulien joukon S malleja. Osoita, että myös $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ on S:n malli.

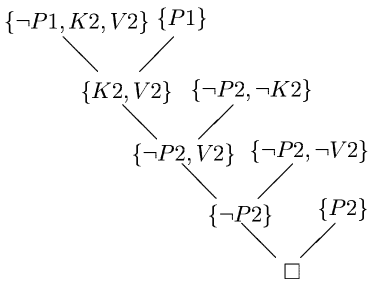
Ratk.
Todistus ristiriidan kautta. Oletetaan $\mathcal{A} \not\models S$. Tällöin joukossa S on klausuuli $\{A, \neg B_1, \ldots, \neg B_2\}$, joka ei toteudu. Jotta näin olisi, pitää olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}$ ja $A \notin \mathcal{A}$. Joukko-opillisen leikkauksen määritelmän mukaan pitää myös olla $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_1$ ja $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \mathcal{A}_2$. Koska $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ ovat klausuulijoukon S malleja, pitää olla myös $A \in \mathcal{A}_1$ ja $A \in \mathcal{A}_2$. Tällöin kuitenkin $A \in \mathcal{A}$ leikkauksen määritelmän perusteella, ja tämä aiheuttaa ristiriidan. Siis $\mathcal{A} \models S$. $\square$

3. Taannoin tutustuimme insinööri Sörsselssönin laatimaan spesifikaatioon yksisuuntaisen risteyksen liikennevaloille. Muunna lauseet klausuulimuotoon ja osoita resoluutiolla, että liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti.

Ratk.
Muunnetaan lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negaatio $P1 \wedge P2$.

Lause		Klausuulit
$Pi \vee Ki \vee Vi$		$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi$	$\equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$	
	$\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi$	$\equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki$	$\equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2)$	$\equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2)$	$\equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1)$	$\equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$		$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitamme seuraavaksi taulukossa annettujen klausuulien joukon toteutumattomaksi (tyhjä klausuuli $\square$ tarkoittaa ristiriitaa), jolloin lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:



4. Laaditaan asiantuntijajärjestelmä, jolla on tarkoitus tutkia, mitkä kemialliset reaktiot ovat mahdollisia. Tarkastellaan reaktioita:

(1) $\mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O}$

(2) $\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2}$

(3) $\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3}$

a) Esitä ylläolevat reaktiot lauselogiikan avulla klausuulimuodossa. Lisää klausuulijoukkoon tieto siitä, että aluksi saatavilla on aineita: $\mathrm{MgO}, \mathrm{H_2}, \mathrm{O_2}$ ja C.

b) Osoita resoluutiolla, että yllä olevassa tilanteessa on mahdollista saada reaktiotuotteena $\mathrm{H_2CO_3}$:a.

Ratk.
Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon. Tuloksena saadaan klausuulit:

(1)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} + \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} + \mathrm{H_2O}\\
\Longrightarrow &\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \to \mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O}\\
\Longrightarrow &\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee (\mathrm{Mg} \wedge \mathrm{H_2O})\\
\Longrightarrow &(\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{Mg}) \wedge (\neg\mathrm{MgO} \vee \neg\mathrm{H_2} \vee \mathrm{H_2O})
\end{aligned}$$

Reaktiosta syntyi siis kaksi klausuulia: $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{Mg}\}$ sekä $\{\neg\mathrm{MgO}, \neg\mathrm{H_2}, \mathrm{H_2O}\}$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C} + \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2}\\
\Longrightarrow &\mathrm{C} \wedge \mathrm{O_2} \to \mathrm{CO_2}\\
\Longrightarrow &\neg\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{O_2} \vee \mathrm{CO_2}\\
\Longrightarrow &\{\neg\mathrm{C}, \neg\mathrm{O_2}, \mathrm{CO_2}\}
\end{aligned}$$

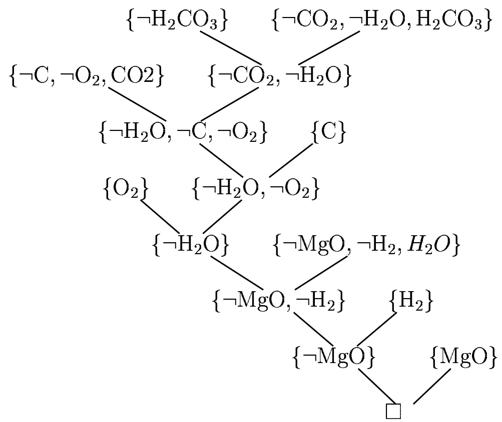
(3)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{CO_2} + \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3}\\
\Longrightarrow &\mathrm{CO_2} \wedge \mathrm{H_2O} \to \mathrm{H_2CO_3}\\
\Longrightarrow &\neg\mathrm{CO_2} \vee \neg\mathrm{H_2O} \vee \mathrm{H_2CO_3}\\
\Longrightarrow &\{\neg\mathrm{CO_2}, \neg\mathrm{H_2O}, \mathrm{H_2CO_3}\}
\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{MgO} \wedge \mathrm{H_2} \wedge \mathrm{O_2} \wedge \mathrm{C}\\
\Longrightarrow &\{\mathrm{MgO}\}, \{\mathrm{H_2}\}, \{\mathrm{O_2}\}\{\mathrm{C}\}
\end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuuliijoukkoa Σ. Nyt halutaan todista, että $\Sigma \models \mathrm{H_2CO_3}$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg\mathrm{H_2CO_3}\}$ on toteutumaton:



◊

5. a) Muodosta resoluution täydellisyystodistuksen puukonstruktio klausuulijoukolle:

$$S = \{\{\neg A, \neg B\}, \{A, \neg B\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{A, B\}, \{\neg A, B, C\}\}$$

b) Tutki, millaisia klausuuleja S:n binääriklausuuleista (2 literaalia) voidaan johtaa. Muodostetaan klausuulijoukko S' lisäämällä nämä klausuulit S:ään.

c) Toista puukonstruktio S':lle.

d) Tutki muuttujajärjestyksen vaikutusta puun kokoon.

6. Konstruoi deterministinen Turingin kone, joka laskee syötteenä annetun binääriluvun seuraajan.

7. Osoita, että graafin 3-väritys kuuluu luokkaan **NP** redusoimalla se lauselogiikan toteutuvuusongelmaksi.