T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9
(opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 5.4)
5 - 11.11.2002

1. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x, y)$ = "solmusta x on kaari solmuun y" avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x, y)$ = "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0, 1, 2, \ldots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} b \longrightarrow c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)).$$

2. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, y)), R(a, b), R(b, a)\} \models R(a, a)$.

c) $\{\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), R(a, b)\} \models R(a, a)$

d) $\models \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\forall y(\neg S(y) \rightarrow \neg \exists x R(x, y)) \rightarrow \exists x S(x))$.

3. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee Q(x, y))$.

b) $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y P(x, y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x, y) \vee \exists x \forall y P(x, y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x, y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x, y)$.

4. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg \exists x((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x, y)$,

c) $\neg \forall y \exists x G(x, y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x, z) \vee P(z, y) \to G(x, y))$.

5. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \to \psi)$

b) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \to \psi)$

c) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \to \forall x \psi(x))$

d) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \to \exists x \psi(x))$