T-79.144 **Syksy 2002**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 8
(opetusmoniste, kappaleet 2.3 - 3.5)
29.10 - 4.11.2002

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{A}} \subset A^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

2. Tiedetään, että

(i) kaikki syylliset ovat valehtelijoita,

(ii) ainakin yksi syytetyistä on myös todistaja ja

(iii) yksikään todistaja ei valehtele.

Todista, etteivät kaikki syytetyt ole syyllisiä. Käytä semanttista taulua.

3. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä

2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja

3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

4. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.

b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x,z) \wedge R(z,y)) \to R(x,y)), R(a,b), R(b,a)\} \models R(a,a)$.

c) $\models \forall x \exists y R(x,y) \to (\forall y (\neg S(y) \to \neg \exists x R(x,y)) \to \exists x S(x))$.

5. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \to \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x (P(x) \to R(x)) \vee \neg \forall x (P(x) \to \neg R(x))$