

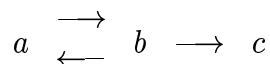
1. Tiedetään, että

- 1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
- 2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
- 3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

2. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \dots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x, y) =$ "solmusta x on kaari solmuun y " avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x, y) =$ "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0, 1, 2, \dots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K .



2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)).$$

3. Tutki semanttisella taululla:

- a) $\{\forall x \exists y (P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.
- b) $\{\forall x \forall y (\exists z (R(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, y)), R(a, b), R(b, a)\} \models R(a, a)$.
- c) $\{\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), R(a, b)\} \models R(a, a)$
- d) $\models \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\forall y (\neg S(y) \rightarrow \neg \exists x R(x, y)) \rightarrow \exists x S(x))$.

4. Muunna seuraavat lauseet konjunkttiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee Q(x, y))$.

b) $\exists x R(x, y) \leftrightarrow \forall y P(x, y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x, y) \vee \exists x \forall y P(x, y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x, y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x, y) \rightarrow \exists x \exists y R(x, y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x, y)$.

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg \exists x((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x, y)$,

c) $\neg \forall y \exists x G(x, y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x, z) \vee P(z, y) \rightarrow G(x, y))$.

6. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\mathcal{Q}\vec{y} (\forall x \phi(x) \rightarrow \psi)$

b) $\mathcal{Q}\vec{y} (\exists x \phi(x) \rightarrow \psi)$

c) $\mathcal{Q}\vec{y} (\phi \rightarrow \forall x \psi(x))$

d) $\mathcal{Q}\vec{y} (\phi \rightarrow \exists x \psi(x))$