T-79.144 **Syksy 2001**
Logiikka tietotekniikassa: perusteet
Laskuharjoitus 9
(opetusmoniste, kappaleet 3.1 - 5.4)
13 - 16.11.2001

1. Tiedetään, että

1) jos tiili on toisen tiilen päällä, se ei ole pöydällä
2) jokainen tiili on pöydällä tai toisen tiilen päällä ja
3) yksikään tiili ei ole sellaisen tiilen päällä, joka edelleen on jonkun tiilen päällä.

Todista semanttisella taululla, että jos tiili on toisen tiilen päällä, niin jälkimmäisen on oltava pöydällä.

2. *Suunnattu* graafi koostuu joukosta solmuja ja solmujen välisistä *suunnatuista* kaarista. Oletetaan, että solmut on esitetty vakiosymbolien $\{a, b, \ldots\}$ avulla ja kaaret kaksipaikkaisen predikaatin $K(x, y) =$ "solmusta x on kaari solmuun y" avulla.

1. Määrittele predikaatit $R_n(x, y) =$ "solmusta x on kaarien suuntainen reitti solmuun y siten, että reitillä on n kappaletta kaaria", kun n saa arvot $0, 1, 2, \ldots, k$. Kuvaa allaoleva graafi käyttäen predikaattia K.

$$a \;\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}}\; b \longrightarrow c$$

2. Osoita semanttisella taululla, että laatimastasi kuvauksesta sekä predikaattien R_2 ja R_3 määritelmistä seuraa loogisesti

$$\exists x(R_2(x, x) \wedge R_3(x, c)).$$

3. Tutki semanttisella taululla:

a) $\{\forall x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)), \forall x P(x)\} \models \forall x Q(x)$.
b) $\{\forall x \forall y(\exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow R(x, y)), R(a, b), R(b, a)\} \models R(a, a)$.
c) $\{\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x)), R(a, b)\} \models R(a, a)$
d) $\models \forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\forall y(\neg S(y) \rightarrow \neg \exists x R(x, y)) \rightarrow \exists x S(x))$.

4. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \to Q(y,z)) \land \exists y(\forall x R(x,y) \lor Q(x,y))$.

b) $\exists x R(x,y) \leftrightarrow \forall y P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \lor \exists x \forall y P(x,y) \land \neg \exists x \exists y P(x,y)$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \exists y R(x,y)) \land \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg \exists x((P(x) \to P(a)) \land (P(x) \to P(b)))$,

b) $\forall y \exists x P(x,y)$,

c) $\neg \forall y \exists x G(x,y)$ ja

d) $\exists x \forall y \exists z(P(x,z) \lor P(z,y) \to G(x,y))$.

6. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ tuoda allaolevista lausemuodoista ulos, s.e. sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\forall x \phi(x) \to \psi)$

b) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\exists x \phi(x) \to \psi)$

c) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \to \forall x \psi(x))$

d) $\mathcal{Q}\vec{y}\ (\phi \to \exists x \psi(x))$