T–79.1001/2 **Syksy 2007**

Tietojenkäsittelyteorian perusteet T/Y

Harjoitus 1, 13.–18.9.

Tehtävät

Muista ilmoittautua kurssille TOPI-järjestelmän kautta 26.9. mennessä. Ilmoittautuminen on kirjanpitosyistä **pakollista**, *vaikka et olisi aikonutkaan osallistua luennoille tai harjoituksiin.*

Kotitehtävät:

1. Olkoon $A = \{a, b, e\}$, $B = \{b, d\}$ ja $C = \{a, c, d\}$. Kirjoita auki (so. luettele alkioittain) seuraavat joukot:

   (a) $A \cup (C - B)$;

   (b) $B \times (A \cap C)$;

   (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) \times \mathcal{P}(\emptyset)$.

2. Olkoon $\Sigma = \{a, b\}$. Anna esimerkkejä merkkijonoista, jotka kuuluvat seuraaviin kieliin (vähintään kolme esimerkkiä kussakin kohdassa):

   (a) $\{w \in \Sigma^* \mid w$ sisältää ainakin kaksi a:ta ja kolmella jaollisen määrän b:tä$\}$;

   (b) $\{a^{2n}b^{3m} \mid 0 \leq n < m\}$;

   (c) $\{uvvu \mid u, v \in \Sigma^*\}$;

   (d) $\{w \in \Sigma^* \mid \exists u, v \in \Sigma^*$ s.e. $w = uu = vvv\}$.

3. Todista induktiolla oikeaksi kaava:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demonstraatiotehtävät:

4. Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

   Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

5. Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

6. Todista induktiolla, että jokaisessa äärellisen perusjoukon S osittainjärjestyksessä on ainakin yksi minimialkio. Osoita myös esimerkein, että minimialkio ei välttämättä ole yksikäsitteinen, ja että väite ei ole yleisesti voimassa, jos perusjoukko S on ääretön.