

Kotitehtävät:

1. Osoita, säännöllisten kielten pumppauslemmaa käyttäen, että parillisen pituisten palindromisanojen muodostama kieli

$$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ei ole säännöllinen.

2. Osoita, yhteydettömien kielten pumppauslemmaa käyttäen, että kieli

$$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

ei ole yhteydetön. (*Vihje:* Tarkastele muotoa $a^n b^n a^n b^n$ olevia merkkijonoja.)

3. Olkoot A ja B numeroituvasti äärettömiä joukkoja, $A \cap B = \emptyset$. Osoita, että tällöin myös yhdiste $A \cup B$ on numeroituvasti ääretön. (*Lisätehtävä:* Osoita, että tulos on voimassa myös ilman oletusta $A \cap B = \emptyset$.)

Demonstraatiotehtävät:

4. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka on suljettu yhdiste-, katenaatio- ja sulkeumaoperaatioiden suhteen, so. jos kielet $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ ovat yhteydettömiä, niin samoin ovat myös kielet $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ ja L_1^* .
5. Osoita, että yhteydettömien kielten luokka ei ole suljettu leikkausten eikä komplementtien suhteen. (*Vihje:* Esitä kieli $\{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$ kahden yhteydettömän kielen leikkauksena.)
6. Osoita, että karteesinen tulo $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ on numeroituvasti ääretön. (*Vihje:* Ajattele parit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sijoitetuiksi euklidiseen (x, y) -tasoon \mathbb{R}^2 . Numeroi parit suoran $y = -x$ suuntaisiin vinoriveihin.) Päättele tämän tuloksen perusteella, että myös rationaalilukujen joukko \mathbb{Q} on numeroituvasti ääretön.