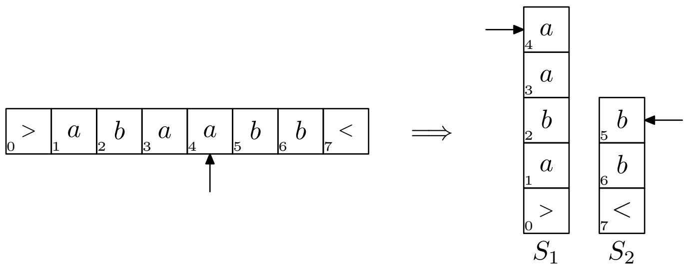
T-79.148 **Kevät 2006**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet
Harjoitus 9
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä**: Osoita, että pinoautomaateilla, joilla on yhden sijasta kaksi pinoa, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin Turingin koneilla.

   Vastaus: Osoitetaan ensin, että pinoautomaatilla, jossa on kaksi pinoa, voidaan simuloida Turingin konetta. Ainut hankaluus tässä on keksiä, miten kahdella pinolla simuloidaan Turingin koneen nauhaa. Tämä onnistuu siten, että toiseen pinoon talletetaan lukupään vasemmalla puolella olevat merkit käänteisessä järjestyksessä, toiseen pinoon pään oikealla puolella olevat merkit:



   Pinoautomaatin toiminta jakautuu kahteen vaiheeseen:

   (a) Alustus, jolloin automaatti kopioi syötteen pinoon S_1, mistä se siirtään merkki kerrallaan pinoon S_2 lukuunottamatta syötteen ensimmäistä merkkiä.

   (b) Varsinainen toiminta, jolloin automaatti tekee siirtymän pinon S_1 päällimmäisen merkin perusteella. Mikäli Turingin kone siirtäisi lukupäätä vasemmalle, siirretään pinon S_1 päällimmäinen merkki pinon S_2 päälle. Mikäli taas lukupää siirtyisi oikealle, siirretään S_2:n päällimmäinen merkki S_1:n päälle.

   Näin laadittu pinoautomaatti simuloi annettua Turingin konetta.

   Seuraavaksi osoitetaan, että Turingin koneella voidaan simuloida pinoautomaattia, jossa on kaksi pinoa. Tämä onnistuu triviaalisti käyttämällä kaksinauhaista epädeterminististä Turingin konetta, jossa kumpikin pinoista talletetaan omalle nauhalleen.

   Formaalisti annettu muunnos Turingin koneesta kaksipinoiseksi pinoautomaatiksi voidaan määritellä seuraavasti:

   Olkoon annettuna Turingin kone $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}}\}$. Muodostetaan 2-pinoinen pinoautomaatti $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', p_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$, missä:

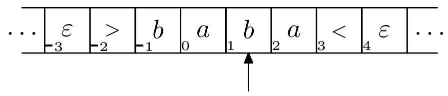
$$
\begin{aligned}
Q' =& Q \cup \{p_0, p_1, p_2\} \\
\Sigma' =& \Sigma \cup \{<\} \\
\Gamma' =& \Gamma \cup \{>, <\} \\
\delta' =& \{((p_0, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, >, \varepsilon)), ((p_1, <, \varepsilon, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, <))\} \\
& \cup \{((p_1, x, \varepsilon, \varepsilon), (p_1, x, \varepsilon)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((p_2, \varepsilon, x, \varepsilon), (p_2, \varepsilon, x)) \mid x \in \Sigma\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, \varepsilon), (q_2, \varepsilon, b)) \mid (q_1, a, q_2, b, L) \in \delta\} \\
& \cup \{((q_1, \varepsilon, a, x), (q_2, xb, \varepsilon)) \mid (q_1, a, q_2, b, R) \in \delta, x \in \Gamma'\}
\end{aligned}
$$

5. **Tehtävä**: Määrittele Turingin koneen standardimallin muunnelma, jossa koneen työnauha on molempiin suuntiin ääretön, ja osoita että tällaisilla koneilla voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin standardimallisillakin.

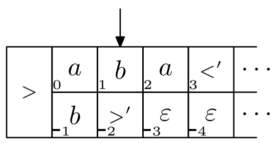
   Vastaus:

   Turingin kone, jonka nauha on kahteen suuntaan ääretön, toimii muuten samoin kuin tavallinen, mutta nyt nauhan alkumerkki ei ole kiinteä, ja kone voi siirtää sitä samaan tapaan kuin loppumerkkiäkin. Nauhan paikat indeksoidaan kokonaisluvuilla $\mathbb{Z}$, ja luku 0 osoittaa alkumerkin paikkaa laskennan alussa.

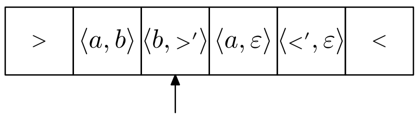
   Tällaista Turingin konetta voidaan simuloida kaksiuraisella koneella. Koneen nauha ajatellaan jaetuksi kahteen osaan, ylä- ja alapuoleen. Yläosaa käytetään nauhan paikkojen $i \geq 0$ tallettamiseen, alaosaa paikoille $i < 0$. Esimerkiksi nauhan sisältö:



   esitetään 2-uraisella koneella seuraavasti:



   Käytännössä nauhan jakaminen uriin tapahtuu korvaamalla aakkosto Σ uudella aakkostolla $\Sigma' = (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\})$. Kukin Σ':n merkki vastaa näin kahta alkuperäisen aakkoston merkkiä. Merkit $\{<', >'\}$ ovat uusia symboleja, joilla osoitetaan nauhanpuoliskojen alku- ja loppukohdat, ja ε merkitsee nauhan ulkopuolella olevia soluja. Ylläoleva esimerkki muodostuukin seuraavanlaiseksi:



   Vielä tarvitaan tapa osoittaa kumpaa nauhan puoliskoa käsitellään. Helpoiten tämä onnistuu määrittelemällä kaikille koneen tiloille q peilikuvatila q'. Kun kone on tilassa q, se tekee siirtonsa ainoastaan ylemmän uran merkkien perusteella (lukupää on nollan oikealla puolella), ja tilassa q' siirrytään alemman uran mukaisesti (lukupää nollan vasemmalla puolella). Koska alempi ura on käänteisessä järjestyksessä, täytyy sitä käsitellessä kääntää lukupään siirto-operaatiot myös peilikuviksi. Aina kun kone lukee nauhan aidon alkumerkin $>$, se vaihtaa käsiteltävää uraa.

   Konstruktion formaali esitys jätetään liitteeseen.

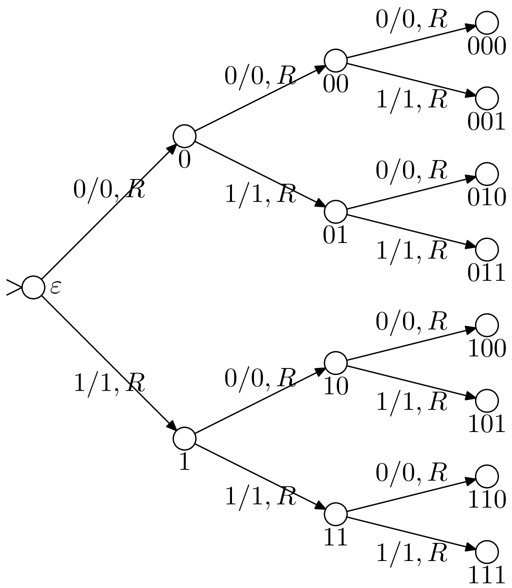
6. **Tehtävä**: Osoita, että Turingin koneilla, joiden nauha-aakkostoon kuuluu syötemerkkien lisäksi enintään kaksi muuta merkkiä, voidaan tunnistaa täsmälleen samat kielet kuin standardimallisillakin koneilla.

   Vastaus

   Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\mathrm{acc}}, q_{\mathrm{rej}})$ Turingin kone, jolla $|\Gamma - \Sigma| > 2$. Nyt halutaan muodostaa kone M', jonka nauha-aakkostoon kuuluvat ainoastaan merkit 0 ja 1. Olkoon $\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Konstruktion ideana on samaistaa joukon Γ alkiot kokonaislukujen { 1, ..., n } kanssa ja esittää nämä k-bittisinä kokonaislukuina, missä $k = \lceil \log_2(|\Gamma|)$. Toisin sanoen, kukin M:n nauha-aakkoston alkio korvataan k:lla bitillä. Oletetaan esimerkiksi, että $N = 3$, ja että nauhalla on sana $a_1 a_2 a_3$. Tällöin koodaus tapahtuu seuraavasti:

$$\boxed{>}\boxed{\underline{a_1}}\boxed{a_2}\boxed{a_3}\boxed{<} \Longrightarrow \boxed{>}\boxed{\underline{0}}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{0}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{<}$$

Koneen M' siirtymäfunktio määritellään siten, että jokaista M:n askelta kohden M' tekee k askelta, joiden aikana se selvittää, mikä Γ:n aakkonen on koodattuna lukupään oikealle puolelle. Tämä voidaan toteuttaa Turingin koneella, joka lukee nauhalta k merkkiä siirtäen koko ajan lukupäätään oikealle, pitäen tiloissaan kirjaa luetuista numeroista. Esimerkiksi tapaus $k = 3$ voidaan hoitaa seuraavanlaisella koneella:



Jos kone päätyy esimerkiksi tilaan 011, niin luettu merkki on a_3, sillä $011_2 = 3_{10}$. Nauhalle kirjoitettava merkki kirjoitetaan samoin k eri siirtymällä, ja lopuksi siirretään lukupäätä k askelta oikeaan suuntaan.

Liite. 4. tehtävän konstruktio formaalisti

Olkoon $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ Turingin kone, jolla on kahteen suuntaan ääretön nauha. Muodostetaan standardimallinen Turingin kone M' seuraavasti:

$$\begin{aligned}
M' =& (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}) \\
Q' =& Q \cup \{q' \mid q \in Q\} \\
\Sigma' =& (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Sigma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \\
\Gamma' =& (\Gamma \cup \{<', >', \varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{<', >', \varepsilon\})
\end{aligned}$$

Tilansiirtofunktio δ' muodostetaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\delta' = & \{(q_1, \langle a, \gamma\rangle, q_2, \langle b, \gamma\rangle, \Delta) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q_1, \langle \sigma', \gamma\rangle, q_2, \langle b, \gamma\rangle, \Delta) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
& \cup \{(q_1', \langle \gamma, a\rangle, q_2', \langle \gamma, b\rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, a, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q', \langle \gamma, a\rangle, q_{\text{end}}, \langle \gamma, b\rangle, \overline{\Delta}) \mid (q, a, q_{\text{end}}, b, \Delta) \in \delta, q_{\text{end}} \in \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}, \gamma \in \Gamma'\} \\
& \cup \{(q_1', \langle \gamma, \overline{\sigma}'\rangle, q_2', \langle \gamma, b\rangle, \overline{\Delta}) \mid (q_1, \sigma, q_2, b, \Delta) \in \delta, \gamma \in \Gamma', \sigma \in \{<, >\}\} \\
& \cup \{(q, >, q', >, R), (q', >, q, >, R) \mid q \in Q\},
\end{aligned}$$

missä $\overline{L} = R$, $\overline{R} = L$, $\overline{<} = >$ ja $\overline{>} = <$.