T-79.1001/2 **Kevät 2006**
Tietojenkäsittelyteorian perusteet (T/Y)
Laskuharjoitus 1
Demonstraatiotehtävien ratkaisut

4. **Tehtävä:** Todista oikeaksi annetun perusjoukon U osajoukkojen A ja B yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhdetta koskevat *de Morganin kaavat*:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Vastaus: Kaksi joukkoa ovat yhtenevät silloin, kun niillä on samat alkiot.

Tarkastellaan aluksi joukkoa $\overline{A \cup B}$. Jos $a \in \overline{A \cup B}$, niin $a \notin A \cup B$. Unionin määritelmästä seuraa, että $a \notin A$ ja $a \notin B$. Tällöin puolestaan $a \in \overline{A}$ ja $a \in \overline{B}$, joten $a \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Näin on saatu todistettua, että $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Koska jokainen lauseelle tehty muokkaus säilyttää ekvivalenssin, samat muokkaukset voi tehdä myös toiseen suuntaan ja näin osoittaa, että myös $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, joten joukot ovat samat.

Tarkastellaan seuraavaksi toista kaavoista. Jos $a \in \overline{A \cap B}$, niin $a \notin A \cap B$. Leikkauksen määritelmästä seuraa, että $a \notin A$ tai $a \notin B$ (tai molemmat). Tällöin joko $a \in \overline{A}$ tai $a \in \overline{B}$, joten $a \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Kaikki askeleet olivat jälleen ekvivalensseja, joten toinen suunta voidaan todistaa tekemällä samat muutokset toisinpäin.

5. **Tehtävä:** Määritellään perusjoukossa $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio $\sim$ säännöllä:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q.$$

Osoita, että tämä on ekvivalenssirelaatio ja kuvaile intuitiivisesti ("geometrisesti") sen ekvivalenssiluokkia.

Vastaus: Relaatio $\sim \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ on määritelty seuraavasti:

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Leftrightarrow \quad m + n = p + q$$

Toisin sanoen, kaksi lukuparia ovat ekvivalentit silloin, kun niiden summat ovat samat.

Relaatio on ekvivalenssirelaatio täsmälleen silloin, kun se on sekä symmetrinen, transitiivinen että refleksiivinen. Tarkistetaan, toteutuvatko ehdot relaatiolle $\sim$.

i) Relaatio $\sim$ on symmetrinen, jos $(m, n) \sim (p, q)$ aina kun $(p, q) \sim (m, n)$. Koska

$$m + n = p + q \Leftrightarrow p + q = m + n,$$

kuuluu $((p, q), (m, n))$ aina relaatioon, kun $((m, n), (p, q))$ kuuluu, joten symmetrisyys toteutuu.

ii) Relaatio $\sim$ on refleksiivinen, jos kaikille $(m, n) \in \mathbb{N}$ pätee $(m, n) \sim (m, n)$. Koska

$$m + n = m + n,$$

ehto toteutuu.

iii) Relaatio $\sim$ on transitiivinen, jos aina kun $(m, n) \sim (p, q)$ ja $(p, q) \sim (k, l)$ myös $(m, n) \sim (k, l)$. Jos pätee:

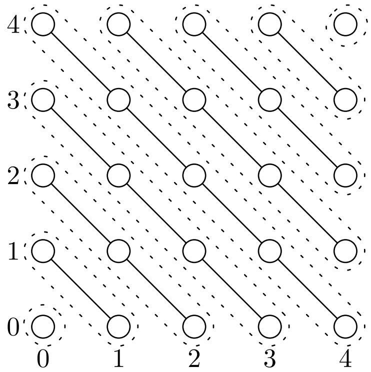
$$m + n = p + q \text{ ja } p + q = k + l,$$

niin

$$m + n = p + q = k + l \Rightarrow m + n = k + l,$$

joten myös transitiivisuus toteutuu.

Koska kaikki kolme ehtoa toteutuivat, on $\sim$ ekvivalenssirelaatio. Alla on relaation graafiesityksen alkuosa:



Kaaviosta nähdään, että relaation määräämät ekvivalenssiluokat vastaavat suoran $y = -x$ suuntaisia suoria.

5. **Tehtävä:** Todista induktiolla, että jos X on äärellinen joukko, jonka koko on $n = |X|$, niin sen potenssijoukon koko on $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

   Vastaus: Perustapaus: $X = \emptyset$. Tällöin $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ja $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

   Induktio-oletus: oletetaan että on olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että sääntö pätee kaikille $n \leq k$.

   Induktioaskel: olkoon $|X| = k + 1$. Merkitään $X = Y \cup \{x\}$ $(x \notin Y)$. Induktio-oletuksen perusteella $|\mathcal{P}(Y)| = 2^k$. $|\mathcal{P}(X)|$:ään kuuluvat kaikki $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukot sekä $|\mathcal{P}(Y)|$:n joukkojen unioni joukon $\{x\}$:n kanssa. Saadaan $|\mathcal{P}(X)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.