

## T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Harjoitus 6, 15.11.

1. Aiemmin on todettu, että sekoituspermutaatioiden (engl. derangements) luokan egf on  $\hat{d}(z) = e^{-z}/(1-z)$ . Johda tästä yksinkertainen rekursiokaava  $n$  alkion sekoitusten määrälle. Keksitkö kaavalle myös kombinatorisen tulkinnan?
2. Olkoon  $h(z) = \sum_{n \geq m} h_n z^n$ , missä  $h_m \neq 0$ , formaali Laurent-sarja. Todista seuraavat tulokset:
  - (a)  $\text{Res}(h'(z)) = 0$ ;
  - (b)  $\text{Res}(h'(z)/h(z)) = m$ .
3. Osoita yleistä potenssisarjojen Lagrange-inversiokaavaa (luentojen Lause 5.2) käyttäen oikeaksi sen seuraava, esim. puurakenteiden analysoinnin kannalta käytökelpoinen muotoilu. Olkoot  $f(z)$  ja  $\phi(u)$  formaaleja potenssisarjoja, joilla on voimassa  $\phi(0) = \phi_0 \neq 0$  ja  $f(z) = z\phi(f(z))$ . Tällöin on kaikilla  $n \geq 1$ :

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\phi(u)^n.$$

(*Vihje:* Tarkastele potenssisarjaa  $\psi(u) = \frac{u}{\phi(u)}$ .)

4. Johda  $n$ -solmuisten nimeämättömien juuretujen järjestettyjen puiden ja  $n$ -solmuisten binääripuiden (juuretut järjestetyt puut, joiden jokaisella solmulla on 0, 1 tai 2 jälkeläistä) lukumääriä kuvaavat lausekkeet suoraan vastaavien tgf-konstruktoiden ja Lagrangen inversiokaavan avulla.