

## T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Kotitehtävät 1 (palautus 25.10. klo 12:15 mennessä)

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt generoivien funktioiden avulla:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + n, & n \geq 1; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} s_0 = 0, \\ s_n = s_{n-1} + n^2, & n \geq 1. \end{cases}$$

2. (a) Tarkastellaan formaalia potenssisarjaa  $F(X) = (\text{Exp}(X) - 1)/X = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} X^n$ . Totea, että tällä on käänteissarja  $B(X) = X/(\text{Exp}(X) - 1)$  ja määritä formaalisti sarjan  $B(X) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} X^n$  kertoimet  $B_0, \dots, B_4$ .

(b) Tehtävän (a)-kohdassa määriteltyjä kertoimia  $B_n$  sanotaan *Bernoullin luvuiksi*. Osoita, että ne toteuttavat rekursioyhtälön

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \quad n \geq 2.$$

(*Vihje*: Potenssisarjojen tulokaava.)

3. *Involuutio* on permutaatio, joka on oma käänteiskuvauksensa. (Syklihajotelmaa ajatellen tämä tarkoittaa siis sitä, että permutaatiossa on vain yhden ja kahden pituisia syklejä.) Muodosta yksinkertainen rekursiokaava  $n$  alkion involuutioiden määrälle, ja tämän perusteella involuutioiden luokan egf. (*Vihje*: Osoita joukon  $[n] = \{1, \dots, n\}$  involuutiot sen mukaan, mitä muita alkioita on samassa sykliässä alkion  $n$  kanssa.)

4. Määritä seuraavat tavalliset generoivat funktiot suoraan ao. kombinatoristen perheiden rakenteen perusteella:

(a) Tgf jonolle  $\langle a_n \rangle$ , missä  $a_n$  = sellaisten numeroista 1 ja 2 koostuvien merkkijonojen lukumäärä, joiden numeroiden summa on  $n$ . (Laskemalla todetaan, että  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 3$ ,  $a_4 = 5$  jne.)

(b) Tgf jonolle  $\langle b_n \rangle$ , missä  $b_n$  =  $n$ -solmuisten nimeämättömien juurrettujen järjestettyjen puiden määrä. (Puu on *juurrettu*, jos sillä on erikseen osoitettu juurisolmu ja *järjestetty*, jos kunkin solmun jälkeläisten kesken on määritelty järjestys vasemmalta oikealle. Tässä tapauksessa on  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $b_3 = 2$ ,  $b_4 = 4$  jne. *Vihje*: Tarkastele ensin epätyhjiä puita.)