T-79.5102 **Syksy 2005**
Laskennallisen logiikan erikoiskurssi
Laskuharjoitus 3
Ratkaisut

1. **"Komplementti puuttuu" -sääntö.** Olkoon klausuulijoukossa S klausuuli, joka sisältää literaalin L, mutta ei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin $\overline{L}$. Muunnetaan S poistamalla kaikki klausuulit, jotka sisältävät literaalin L. Malliehdoksi saadaan L on tosi.

   Olkoon nyt S klausuulijoukko, joka sisältää literaalin L, mutta ei yhtään klausuulia, joka sisältää literaalin $\overline{L}$ ja S_L joukosta S "komplementti puuttuu" -säännöllä saatava klausuulijoukko.

   Väite. Joukko S on toteutuva $\iff$ S_L on toteutuva.

   Todistus.
   ($\Longrightarrow$) Olkoon S toteutuva, eli on olemassa totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models S$. Oletetaan, että $\mathcal{A} \not\models S_L$ (vastaoletus). Tällöin on olemassa klausuuli $C \in S_L$ siten, että $\mathcal{A} \not\models C$. Kuitenkin pätee, että $C' \in S$ kaikilla $C' \in S_L$ ja koska $\mathcal{A} \models S$, pätee $\mathcal{A} \models C$, ristiriita.

   ($\Longleftarrow$) Olkoon S_L toteutuva, eli on olemassa totuusjakelu $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \models S_L$. Koska L ei esiinny joukossa S_L, oletetaan $\mathcal{A} \models L$. Oletetaan $\mathcal{A} \not\models S$ (vastaoletus) eli on olemassa klausuuli $C \in S$ siten, että $\mathcal{A} \not\models C$.

   (a) Jos C sisältää literaalin L, pätee $\mathcal{A} \models C$, ristiriita.

   (b) Jos C ei sisällä kumpaakaan literaaleista L ja $\overline{L}$ (muista, että $\overline{L}$ ei esiinny joukossa S), $C \in S_L$ ja edelleen koska $\mathcal{A} \models S_L$, saadaan $\mathcal{A} \models C$, ristiriita. □

2. a)

$$\{\neg A \vee B,\ \neg B \vee C,\ \neg C \vee D,\ \neg D\}$$
$$(\neg D)$$
$$\{\neg A \vee B,\ \neg B \vee C,\ \neg C\}$$
$$(\neg C)$$
$$\{\neg A \vee B,\ \neg B\}$$
$$(\neg B)$$
$$\{\neg A\}$$
$$(\neg A)$$
$$\{\}$$

   Klausuulijoukko on toteutuva.

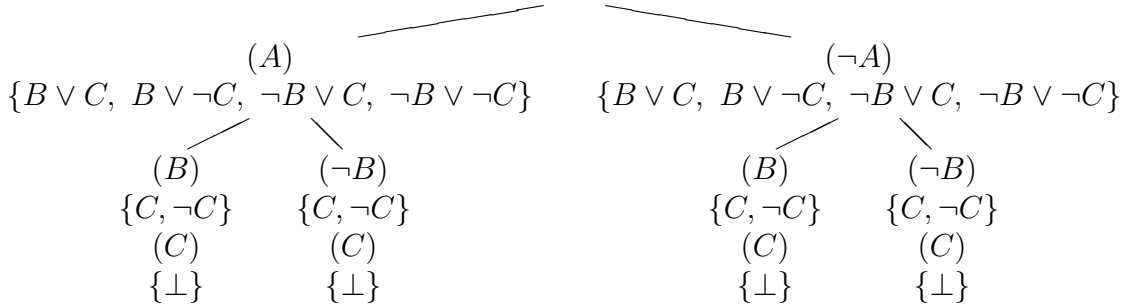
b)

$$\{A,\ \neg A \vee B,\ \neg B \vee \neg C \vee D,\ \neg D \vee E,\ E\}$$
$$(\neg C)$$
$$\{A,\ \neg A \vee B,\ \neg D \vee E,\ E\}$$
$$(\neg D)$$
$$\{A,\ \neg A \vee B,\ E\}$$
$$(E)$$
$$\{A,\ \neg A \vee B\}$$
$$(A)$$
$$\{B\}$$
$$(B)$$
$$\{\}$$

Klausuulijoukko on toteutuva.

c)

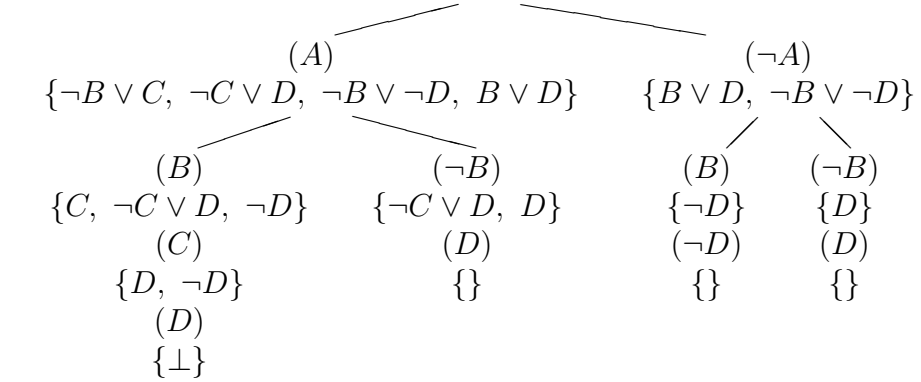
$$\{A \vee B \vee C,\ A \vee B \vee \neg C,\ A \vee \neg B \vee C,\ A \vee \neg B \vee \neg C,$$
$$\neg A \vee B \vee C,\ \neg A \vee B \vee \neg C,\ \neg A \vee \neg B \vee C,\ \neg A \vee \neg B \vee \neg C\}$$



Klausuulijoukko ei ole toteutuva.

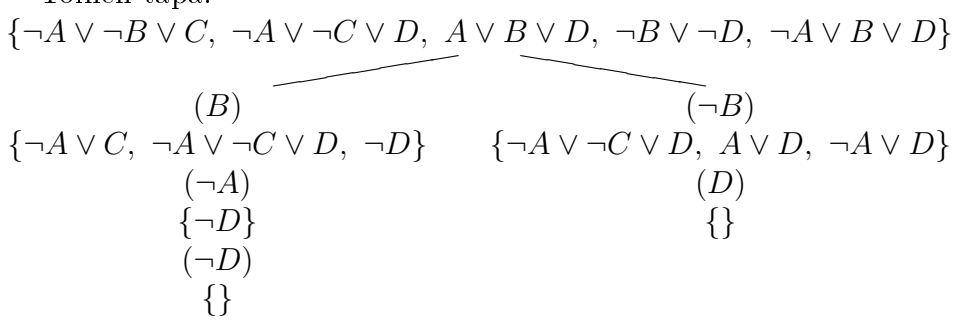
3. Ensimmäinen tapa:

$$\{\neg A \vee \neg B \vee C,\ \neg A \vee \neg C \vee D,\ A \vee B \vee D,\ \neg B \vee \neg D,\ \neg A \vee B \vee D\}$$



Klausuulijoukko on toteutuva. Tällä kertaa tarvittiin vain kaksi haarautumista.

Toinen tapa:



Jos yksikin haara päättyy tyhjään joukkoon, niin klausuulijoukko on toteutuva. Tarkastelu voidaan siis lopettaa heti kun sellainen haara löytyy, ellei nimenomaan haluta löytää kaikkia malleja.