T-79.5102 **Syksy 2005**
Laskennallisen logiikan erikoiskurssi
Laskuharjoitus 1
Ratkaisut

1. Jokaista graafin solmua a kohden otetaan lausejoukkoon atomilause A, joka on tosi täsmälleen silloin, kun a kuuluu ytimeen. Lausejoukko muodostetaan käyttäen kahta eri muotoa olevia lauseita.

   (a) Kaikille kaarille $\langle v, u\rangle \in E$ lisätään lause $\neg V \vee \neg U$.

   (b) Jos solmun v seuraajat ovat $u_1, \ldots, u_n$, niin lausejoukkoon lisätään $\neg V \rightarrow U_1 \vee \cdots \vee U_n$. Mikäli v:llä ei ole seuraajia lainkaan, asetetaan implikaation oikealle puolelle uusi atomi $\perp$, joka on epätosi kaikissa malleissa.

   Graafille G_1 lausejoukoksi K_1 tulee:

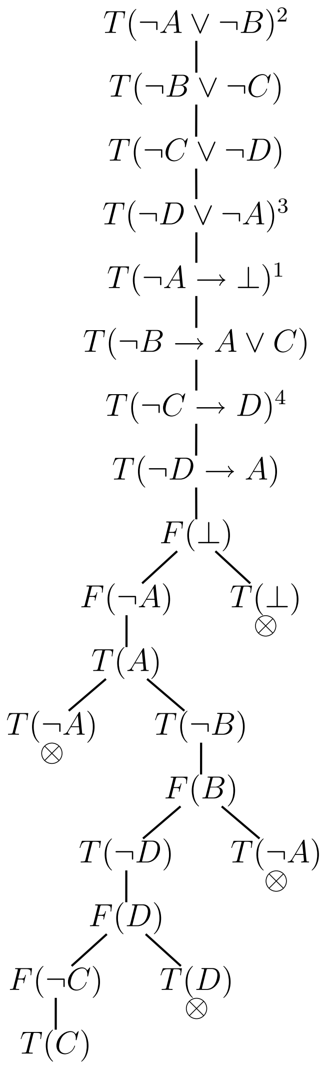
$$\begin{array}{cc}
\neg A \vee \neg B & \neg B \vee \neg C \\
\neg C \vee \neg D & \neg D \vee \neg A \\
\neg A \rightarrow \perp & \neg B \rightarrow A \vee C \\
\neg C \rightarrow D & \neg D \rightarrow A \\
\neg\perp &
\end{array}$$

   Yritetään etsiä lausejoukolle K_1 mallia semanttisella taululla. Taulu on esitetty kuvassa 1. Taulu on tehty ainoastaan siihen asti, että kaikki atomilauseet saavat totuusarvon avoimessa haarassa. Tämän jälkeen täytyy vielä tarkistaa, että myös käsittelemättä jätetyt lausejoukon lauseet toteutuvat annetulla totuusjakelulla $\{A, \neg B, C, \neg D\}$. Koska näin tapahtuu, on $\{a, c\}$ graafin G_1 ydin.

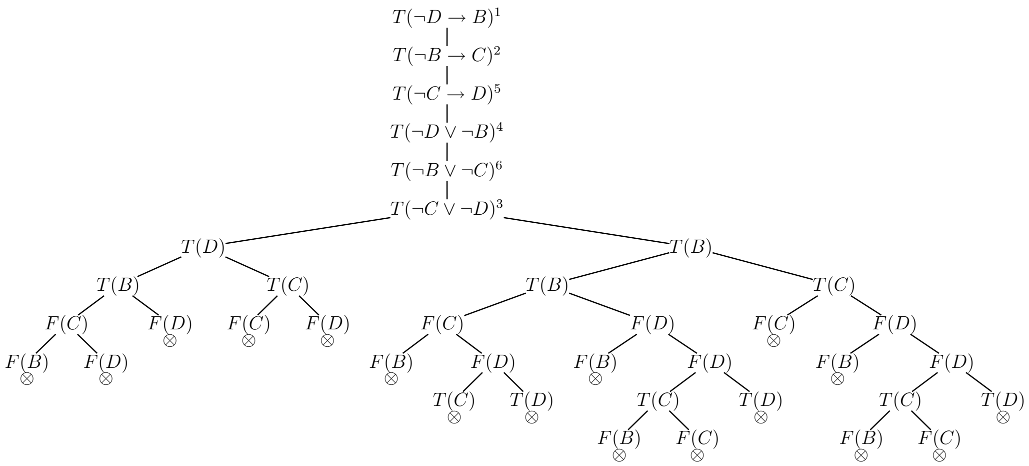
   Graafin G_2 vastaava lausejoukko K_2 on:

$$\begin{array}{cc}
\neg A \vee \neg B & \neg A \vee \neg D \\
\neg A \vee \neg C & \neg B \vee \neg C \\
\neg C \vee \neg D & \neg D \vee \neg B \\
\neg A \rightarrow B \vee C \vee D & \neg B \rightarrow C \\
\neg C \rightarrow D & \neg D \rightarrow B
\end{array}$$

   Koska lausejoukolla ei ole malleja (semanttinen taulu kuvassa 2), ei graafilla ole ydintä.



Kuva 1: Graafin G_1 semanttinen taulu



Kuva 2: Graafin G_2 semanttinen taulu (mukana vain relevantti osa ja välivaiheita on sivuutettu)

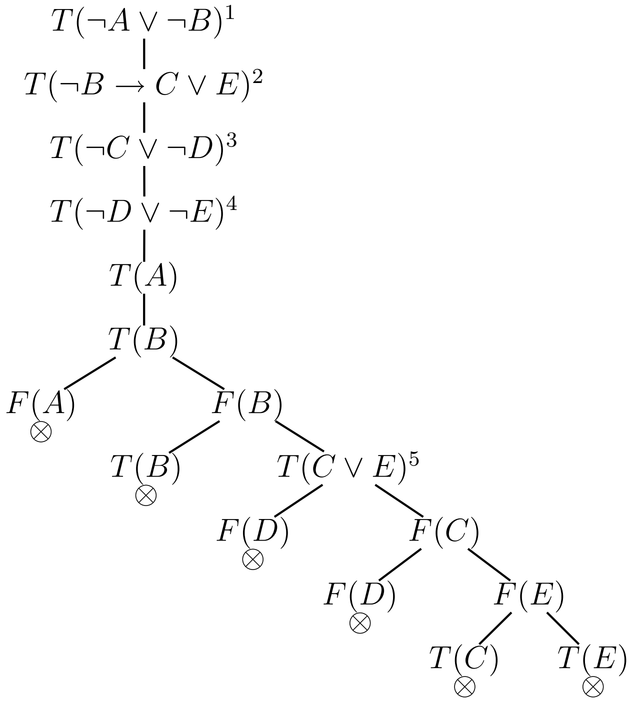
2. Graafia G_3 vastaava lausejoukko K_3 on:

$$\begin{array}{cc}
\neg E \vee \neg F & \neg F \vee \neg A \\
\neg A \vee \neg B & \neg B \vee \neg C \\
\neg C \vee \neg D & \neg D \vee \neg E \\
\neg B \vee \neg E & \neg D \vee \neg C \\
\neg A \rightarrow B & \neg B \rightarrow C \vee E \\
\neg C \rightarrow D & \neg D \rightarrow C \vee E \\
\neg E \rightarrow F & \neg F \rightarrow A
\end{array}$$

Koska halutaan osoittaa, että a ja d eivät voi kuulua samaan ytimeen, tarkistetaan päteekö $K_3 \models \neg A \vee \neg D$. Käytännössä tämä tarkistus tehdään asettamalla semanttisen taulun juureen toden lausejoukon lisäksi lause $F(\neg A \vee \neg D)$ ja tarkistamalla päästäänkö ristiriitaan. Taulu yksinkertaistuu hieman, kun testi kirjoitetaan muodossa $T(A \wedge D)$. Koska kaikki taulun kaikki haarat sulkeutuvat (kuva 3), väite pätee.

Tässä esimerkissä on lausejoukon K_3 kaikki mallit helpointa löytää kokeilemalla. Oletetaan ensin, että A on tosi. Tällöin välttämättä $\neg B$ ja $\neg F$, joten myös E:n on oltava tosi. Tästä puolestaan seuraa $\neg D$, josta puolestaan C. Kiinnittämällä A:n arvo todeksi saadaan siis suoraan implikaatioita ja disjunktioita ketjuttamalla kaikille atomilauseille totuusarvot. Saatu totuusjakelu toteuttaa kaikki lauseet, joten $\{A, C, E, \neg B, \neg D, \neg F\}$ on K_3:n malli ja $\{a, c, e\}$ graafin ydin.

Jos puolestaan oletetaan, että $\neg A$ on tosi. Tällöin nähdään suoraan, että B ja F ovat tosia, joten $\neg E$ ja $\neg C$ ovat myös. Tämän jälkeen on



Kuva 3: Graafin G_3 semanttinen taulu (mukana vain relevantti osa ja välivaiheita on sivuutettu)

pakko valita D todeksi, joten toinen malli on $\{\neg A, B, \neg C, D, \neg E, F\}$, jota vastaa ydin $\{b, d, f\}$.

Muita mahdollisia malleja ei ole, sillä A:n totuusarvon kiinnittäminen kiinnitti myös muiden atomilauseiden totuusarvot.