## Lauselogiikan kertausta

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjakelut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
  - Mallin käsite
  - Toteutuvuus
  - Pätevyys
  - Looginen seuraavuus
  - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot
- Yhteys predikaattilogiikkaan

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, \ldots, C, \ldots$
- negaatiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaatiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: ()

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Kielen määritelmä

Olkoon $\mathcal{P}$ ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

*Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt*:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on *lause*.
2. Jos $\alpha$ ja $\beta$ ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lausekkeiden (lauseiden) joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi $\mathcal{L}$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois: $A \rightarrow B$ eikä $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista
  2. $\vee$, $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  3. $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit

  Esimerkiksi: $\neg A \rightarrow B$ eikä $(\neg A) \rightarrow B$,
  $A \wedge B \rightarrow B \vee C$ eikä $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$,
  mutta $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.
- Ketjudisjunktiot/konjunktiot: $A \vee B \vee C$ kirjoitetaan lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Totuusjakelut

**Määritelmä.** *Totuusjakelu* $\mathcal{A}$ on atomisten lauseiden joukon $\mathcal{P}$ osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P}-\mathcal{A}$:n atomiset lauseet ovat epätosia.

**Huomioita.** (i) Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $|\mathbf{2}^{\mathcal{P}}| = 2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.

(ii) Totuusjakelu $\mathcal{A}$ voidaan määritellä vaihtoehtoisesti kuvauksena joukolta $\mathcal{P}$ totuusarvojen joukolle $\{T,E\}$.

Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ totuusjakelu. Seuraavassa määritellään milloin lause $\phi \in \mathcal{L}$ on **tosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \models \phi$) ja milloin $\phi$ on **epätosi** $\mathcal{A}$:ssa ($\mathcal{A} \not\models \phi$).

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Lauselogiikan totuusmääritelmä

**Määritelmä.**

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$ (atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$).
2. $\mathcal{A} \models \neg\alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$ tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

**Huomio.**

$\mathcal{A} \models P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \iff \forall i \in \{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A} \models P_i$.

$\mathcal{A} \models P_1 \vee \cdots \vee P_n \iff \exists i \in \{1,\ldots,n\}\colon \mathcal{A} \models P_i$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Mallin käsite ja toteutuvuus

**Määritelmä.** Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ *malli*, joss lause $\alpha$ on tosi $\mathcal{A}$:ssa eli $\mathcal{A} \models \alpha$.

**Esimerkki.** Totuusjakelut $\mathcal{A}_1 = \{A\}, \mathcal{A}_2 = \{B\}$ ja $\mathcal{A}_3 = \{A,B\}$ ovat malleja lauseelle $A \vee B$.

**Määritelmä.** Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* ($\mathcal{A} \models \Sigma$), joss kaikille lausejoukon $\Sigma$ lauseille $\sigma \in \Sigma$ pätee $\mathcal{A} \models \sigma$.

**Määritelmä.** Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on sen malli.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

**Määritelmä.** Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *pätevä/tautologia* (merkitään $\models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

**Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{P} = \{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A \vee \neg A$ on pätevä, koska $A \vee \neg A$ on tosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}_1 = \{\}$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A\}$.

**Määritelmä.** Lauseet $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentteja* ($\alpha \equiv \beta$), joss $\mathcal{A} \models \alpha \iff \mathcal{A} \models \beta$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

**Esimerkki.** $A$ ja $\neg\neg A$ ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjakeluissa.

**Huomio.** Kaikillle $\alpha \in \mathcal{L}$ ja $\beta \in \mathcal{L}$ pätee $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Looginen seuraavuus

**Määritelmä.** Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ looginen seuraus (merkitään $\Sigma \models \alpha$), jos $\mathcal{A} \models \alpha$ kaikille lausejoukon $\Sigma$ malleille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

**Esimerkki.** $\neg\neg A$ seuraa loogisesti lausejoukoista $\{A\}$ ja $\{A \wedge \neg A\}$.

**Huomioita.**

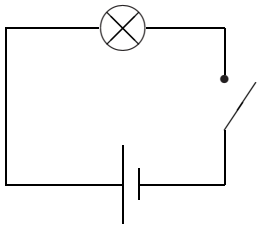
- Jos $\Sigma \not\models \alpha$, on olemassa **vastamalli** $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \Sigma$ ja $\mathcal{A} \not\models \alpha$ (vastaava käsite käytössä myös pätevyyden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$.
- $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ on toteutumaton.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Esimerkki

**Esimerkki.** Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

$L =$ "Lamppu palaa",
$K =$ "Kytkin on suljettu" ja
$P =$ "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$$\neg P \rightarrow \neg L \text{ ja}$$
$$P \rightarrow (L \leftrightarrow K).$$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



Totuusjakelu voidaan ymmärtää yhden *asiaintilan* kuvauksena.

**Esimerkki.** Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$: Patterissa on riittävästi varausta.
Kytkin ei ole suljettu.
Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.
Lamppu palaa.
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiaintila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ ja lauseelle $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



| $P$ | $L$ | $K$ | $\neg P$ | $\neg L$ | $\neg P \rightarrow \neg L$ | $L \leftrightarrow K$ | $P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$ | $\neg L \vee K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |

Lausejoukolla $\Sigma$ on neljä erilaista mallia jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.

Lause $\neg L \vee K$ on tosi näissä kaikissa, joten $\Sigma \models \neg L \vee K$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Normaalimuodot

**Määritelmä.** Jos $A$ on atominen lause, niin $A$ ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.

**Määritelmä.** Lause $\alpha$ on *konjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos $\alpha$ on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen $\beta_i$ on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$.

Disjunktiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktion ja disjunktion roolit vaihdetaan keskenään:

**Määritelmä.** Lause $\alpha$ on *disjunktiivisessa normaalimuodossa*, jos $\alpha$ on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen $\beta_i$ on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunktiiviseen (disjunktiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit $\leftrightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

  $\alpha \leftrightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha) \quad (1)$

- Poista konnektiivit $\rightarrow$ seuraavanlaisilla korvauksilla:

  $\alpha \rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \vee \beta \quad (2)$

- Siirrä negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

  $\neg\neg\alpha \quad \rightsquigarrow \quad \alpha \quad (3)$

  $\neg(\alpha \vee \beta) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \wedge \neg\beta \quad (4)$

  $\neg(\alpha \wedge \beta) \quad \rightsquigarrow \quad \neg\alpha \vee \neg\beta \quad (5)$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



- (KNM) Lopuksi siirrä $\wedge$-konnektiivit $\vee$-konnektiivien ulkopuolelle:

  $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \quad \rightsquigarrow \quad (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad (6)$

  $(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \quad \rightsquigarrow \quad (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \quad (7)$

  Tai (DNM) siirrä $\vee$-konnektiivit $\wedge$-konnektiivien ulkopuolelle:

  $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \quad \rightsquigarrow \quad (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \quad (8)$

  $(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \quad \rightsquigarrow \quad (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \quad (9)$

**Huomioita.**

(i) Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin.

(ii) Normaalimuotoja voidaan usein yksinkertaistaa.

(iii) Tietyille lauseille muunnossäännöt tuottavat normaalimuodon, jonka pituus on eksponentiaalinen lauseen pituuteen verrattuna. (Tämä voidaan välttää ottamalla käyttöön uusia atomeja).

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



**Esimerkki.** Muutetaan lause $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ konjunktiiviseen ja disjunktiiviseen normaalimuotoon.

$A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$

$\rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \quad (1)$

$\rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (2)$

$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (4)$

Konjunktiivinen normaalimuoto:

$\rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (7)$

$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (6)$

$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) \quad (6)$

$\rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$

Disjunktiivinen normaalimuoto:

$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) \quad (8)$

$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) \quad (9)$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet $A$ ja niiden negaatiot $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti: $\overline{A} = \neg A$, $\overline{\neg A} = A$.
- Literaalien $l_1, \ldots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa $\{l_1, \ldots, l_n\}$.
- Joukko klausuuleita $S$ edustaa klausuuliensa konjunktiota.

Huomaa ero: $\neg A \vee B \vee \neg A \;\leadsto\; \{\neg A, B\}$.

**Huomio.** Konjunktiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

**Esimerkki.** Konjunktiivista normaalimuotoa $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhde

- Predikaattilogiikka on lauselogiikan yleistys, jonka syntaksi ja semantiikka ovat monimutkaisemmat.
- Lauselogiikka saadaan predikaattilogiikan erikoistapauksena: atomiset lauseet vastaavat 0-paikkaisia predikaatteja.
- Toisaalta predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi. Olkoon $\Sigma$ predikaattilogiikan lausejoukko.
  1. Muunnetaan $\Sigma$ klausuulijoukoksi $S$ siten, että $\Sigma$ on toteutumaton $\iff$ $S$ on toteutumaton:

     $\Sigma \leadsto$ prenex-muoto $\leadsto$ skolemointi $\leadsto$ KNM $\leadsto S$
  2. $S$ on toteutumaton $\iff$ $S$:n Herbrand-instanssien joukon $S'$ äärellinen osajoukko $S'' \subseteq S'$ on toteutumaton.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause $\alpha$, joka on muotoa $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n \phi$, missä kukin $Q_i$ on kvanttori ($\forall$ tai $\exists$), ja alikaava $\phi$ ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

**Esimerkki.** Seuraavat lauseet ovat prenex-normaalimuodossa:

$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x,y,z) \rightarrow (Q(y,z,w) \rightarrow R(z,w,x)))$ $\quad \forall x \exists y\, P(x,y)$

Jokainen predikaattilogiikan lause voidaan muuttaa loogisesti ekvivalenttiin prenex-normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$:

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \psi &\leadsto \neg\phi \vee \psi \\ \phi \leftrightarrow \psi &\leadsto (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg\psi) \end{aligned}$$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



2. Viedään lauserakenteen negaatiot sisään ja tuodaan kvanttorit ulos ($z$ on uusi muuttuja):

$$\begin{aligned} \neg\neg\varphi &\leadsto \varphi \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\leadsto \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\leadsto \neg\varphi \wedge \neg\psi \\ \vec{Q}x \neg\forall y \varphi &\leadsto \vec{Q}x \exists y \neg\varphi \\ \vec{Q}x \neg\exists y \varphi &\leadsto \vec{Q}x \forall y \neg\varphi \\ \vec{Q}x (\forall y \varphi \vee \psi) &\leadsto \vec{Q}x \forall z (\varphi(y/z) \vee \psi) \end{aligned}$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa $\forall$:in tilalla $\exists$, ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Eksistenssikvanttorien eliminointi

Olkoon $\vec{Q}x\phi$ prenex-normaalimuodossa s.e. $\vec{Q}x$ sisältää kvanttorin $\exists x_i$.

- Jos $\exists x_i$:tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan $x_i$ uudella vakiolla $c$.
- Jos $\exists x_i$:tä edeltävät universaalikvanttorit $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \ldots, \forall x_{n_m}$, poistetaan kvanttori $\exists x_i$, ja korvataan $x_i$:n jokainen esiintymä termillä $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_m})$, missä $f$ on uusi funktiosymboli.

**Huomio.** Looginen ekvivalenssi ei säily, mutta toteutuvuus säilyy.

**Esimerkki.** Lause $\exists x P(x)$ ja sen skolemoitu muoto $P(c)$.

Nyt $\models P(c) \rightarrow \exists x P(x)$, mutta $\not\models \exists x P(x) \rightarrow P(c)$.

Vastamalli $\mathcal{A}$: universumi $A = \{1,2\}$, $c^{\mathcal{A}} = 1$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{2\}$.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Klausuulimuoto predikaattilogiikassa

Mikä tahansa predikaattilogiikan lause voidaan saattaa klausuulimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Haetaan prenex-normaalimuoto.
2. Muunnetaan tämä konjunktiivinen normaalimuotoon.
3. Mikäli KNM sisältää eksistenssikvanttoreita, skolemoidaan.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

**Esimerkki.** Haetaan klausuuliesitys lauseelle

$$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall y Q(x,y)) \vee R(x)):$$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,z)) \vee R(x)) && (1)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x \exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,z) \vee R(x))) && (2)\\
&\rightsquigarrow \quad \forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,f(x)) \vee R(x))) && (3)\\
&\rightsquigarrow \quad \{\{P(x),R(x)\},\{\neg Q(x,f(x)),R(x)\}\} && (4)
\end{aligned}$$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Herbrand-mallit

- Klausuulijoukon $S$ *Herbrand-universumi* $U_S$ on niiden muuttujattomien termien joukko, joka voidaan muodostaa $S$:ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos $S$:ssä ei esiinny vakiosymboleja, otetaan käyttöön jokin vakiosymboli $c$.
- Klausuulijoukon $S$ *Herbrand-kanta* $B_S$ koostuu atomisista lauseista, jotka voidaan konstruoida käyttäen $S$:ssä esiintyviä predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin termejä.
- Klausuulijoukon $S$ *Herbrand-mallit* ovat Herbrand-kannan $B_S$ osajoukkoja ja ne voidaan tulkita lauselogiikan totuusjakeluiksi.
- Klausuulijoukon $S$ *Herbrand-instanssien* joukko $S'$ saadaan korvaamalla $S$:n klausuulien muuttujat klausuuli klausuulilta kaikilla mahdollisilla $U_S$:n termien kombinaatioilla.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



**Esimerkki.** Olkoon klausuulijoukko

$$S = \{\{\neg P(x), Q(f(x,x))\}, \{P(c)\}\}.$$

Klausuulijoukossa esiintyvät vakio $c$ ja funktiosymboli $f(\cdot,\cdot)$.

- Herbrand-universumi
  $U_S = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c,f(c,c)), f(f(c,c),f(c,c)), \ldots\}$.
- Herbrand-kanta $B_S = \{P(c), Q(c), P(f(c,c)), Q(f(c,c)), \ldots\}$.
- Herbrand-instanssien joukko $S' =$

$$\{\ \{P(c)\},\ \{\neg P(c), Q(f(c,c))\},$$
$$\{\neg P(f(c,c)), Q(f(f(c,c),f(c,c)))\},\ \ldots\ \}.$$

- Esim. $\mathcal{A} = \{P(c), Q(f(c,c))\}$ on $S'$:n ja $S$:n Herbrand-malli.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio

## Tietämyksen esittäminen

Tietämyksen esitämisen kannalta on usein järkevää nimetä universumin alkiot yksikäsitteisesti:

- Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(a = b), \neg(b = c), \neg(c = a)$$

- Ei muita objekteja kuin nimetyt (domain closure):

$$\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c)$$

☞ Voidaan rajautua Herbrand-mallien tarkasteluun

☞ Jos klausuulimuodossa ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-instansseja muodostuu äärellinen määrä ja keskeiset loogiset päätösongelmat (toteutuvuus, jne.) säilyvät tällöin ratkeavina.

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio



## Johtopäätöksiä

Lauselogiikka on monien sovellusten kannalta riittävä:

- Tarvittaessa rakententeeltaan samankaltaisia lauseita voidaan pakata yhdeksi lauseeksi muuttujien avulla: esim. $P(x) \rightarrow Q(x)$.
- Ongelmaksi jää tällöin instantioinnin järjestäminen järkevästi (tehdäänkö instantiointi kerralla vai tarpeen mukaan).
- Yksi luonteva mahdollisuus on rajoittaa/kontrolloida instantiointia erityisten domain-predikaattien $D(x)$ avulla:

$$\begin{array}{l} D(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x). \\ D(a).\ D(b).\ D(c). \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} P(a) \rightarrow Q(a). \\ P(b) \rightarrow Q(b). \\ P(c) \rightarrow Q(c). \end{array}$$

© 2005 Teknillinen korkeakoulu, Tietojenkäsittelyteorian laboratorio