

## Lauselogiikan kertausta

- Syntaksi: aakkosto ja lauseenmuodostussäännöt
- Semantiikka: totuusjaketut ja totuusmääritelmä
- Semanttiset peruskäsitteet:
  - Mallin käsite
  - Toteutuvuus
  - Pätevyys
  - Looginen seuraavuus
  - Looginen ekvivalenssi
- Normaalimuodot
- Yhteys predikaattilogiikkaan

## Kielen määritelmä

Olkoon  $\mathcal{P}$  ei-tyhjä joukko atomisia lauseita.

*Lauselogiikan lauseenmuodostussäännöt:*

1. Jokainen atominen lause  $A \in \mathcal{P}$  on *lause*.
2. Jos  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat lauseita, niin myös  $(\neg\alpha)$ ,  $(\alpha \vee \beta)$ ,  $(\alpha \wedge \beta)$ ,  $(\alpha \rightarrow \beta)$ ,  $(\alpha \leftrightarrow \beta)$  ovat *lauseita*.
3. vain edellä olevien sääntöjen perusteella muodostetut merkkijonot ovat *lauseita*.

Näiden sääntöjen nojalla muodostettavissa olevien lausekkeiden (lauseiden) joukkoa kutsutaan (atomisten lauseiden joukkoon  $\mathcal{P}$  perustuvaksi) lauselogiikan kieleksi  $\mathcal{L}$ .

## Lauselogiikan aakkosto

- atomiset lauseet:  $A, A_1, A_2, \dots, B, B_1, \dots, C, \dots$
- negaationsymboli:  $\neg$  (ei)
- konjunktiosymboli:  $\wedge$  (ja)
- disjunktiosymboli:  $\vee$  (tai)
- implikaatiosymboli:  $\rightarrow$  (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli:  $\leftrightarrow$  (jos ja vain jos)
- sulut:  $()$

Symboleja  $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$  ja  $\leftrightarrow$  kutsutaan *konnektiiveiksi*.

## Sopimukset sulkeiden käytöstä

- Uloimmat sulkeet tapana jättää pois:  $A \rightarrow B$  eikä  $(A \rightarrow B)$
- Konnektiivien presedenssi:
  1.  $\neg$  on vahvin konnektiiveista
  2.  $\vee, \wedge$  ovat heikompia kuin  $\neg$ , mutta vahvempia kuin  $\rightarrow, \leftrightarrow$
  3.  $\rightarrow, \leftrightarrow$  ovat heikoimmat konnektiivit

Esimerkiksi:  $\neg A \rightarrow B$  eikä  $(\neg A) \rightarrow B$ ,  
 $A \wedge B \rightarrow B \vee C$  eikä  $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C)$ ,  
 mutta  $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$ .

- Ketjudisjunktiot/konjunktiot:  $A \vee B \vee C$  kirjoitetaan lauseiden  $A \vee (B \vee C)$  ja  $(A \vee B) \vee C$  sijaan.

## Totuusjaketut

**Määritelmä.** *Totuusjaketu*  $\mathcal{A}$  on atomisten lauseiden joukon  $\mathcal{P}$  osajoukko.

Ajatuksena on, että

- $\mathcal{A}$ :n atomiset lauseet ovat tosia,
- $\mathcal{P} - \mathcal{A}$ :n atomiset lauseet ovat epätosia.

**Huomioita.** (i) Jos  $\mathcal{P}$  on äärellinen, erilaisia totuusjaketuja on  $|\mathcal{P}| = 2^{|\mathcal{P}|}$  kappaletta.

(ii) Totuusjaketu  $\mathcal{A}$  voidaan määritellä vaihtoehtoisesti kuvauksena joukolta  $\mathcal{P}$  totuusarvojen joukolle  $\{T, E\}$ .

Olkoon  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  totuusjaketu. Seuraavassa määritellään milloin lause  $\phi \in \mathcal{L}$  on **tos**i  $\mathcal{A}$ :ssa ( $\mathcal{A} \models \phi$ ) ja milloin  $\phi$  on **epätosi**  $\mathcal{A}$ :ssa ( $\mathcal{A} \not\models \phi$ ).

## Mallin käsite ja toteutuus

**Määritelmä.** Totuusjaketu  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  on lauseen  $\alpha \in \mathcal{L}$  *malli*, joss lause  $\alpha$  on tosi  $\mathcal{A}$ :ssa eli  $\mathcal{A} \models \alpha$ .

**Esimerkki.** Totuusjaketut  $\mathcal{A}_1 = \{A\}$ ,  $\mathcal{A}_2 = \{B\}$  ja  $\mathcal{A}_3 = \{A, B\}$  ovat malleja lauseelle  $A \vee B$ .

**Määritelmä.** Totuusjaketu  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  on lausejoukon  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$  *malli* ( $\mathcal{A} \models \Sigma$ ), joss kaikille lausejoukon  $\Sigma$  lauseille  $\sigma \in \Sigma$  pätee  $\mathcal{A} \models \sigma$ .

**Määritelmä.** Lause  $\alpha \in \mathcal{L}$  (tai lausejoukko  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ ) on *toteutuva*, joss ainakin yksi totuusjaketu  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  on sen malli.

## Lauselogiikan totuusmääritelmä

**Määritelmä.**

1.  $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$  (atomisille lauseille  $A \in \mathcal{P}$ ).
2.  $\mathcal{A} \models \neg\alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ .
3.  $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$  ja  $\mathcal{A} \models \beta$ .
4.  $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$  tai  $\mathcal{A} \models \beta$ .
5.  $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$  tai  $\mathcal{A} \models \beta$ .
6.  $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$  joko  $\mathcal{A} \models \alpha$  ja  $\mathcal{A} \models \beta$  tai  $\mathcal{A} \not\models \alpha$  ja  $\mathcal{A} \not\models \beta$ .

**Huomio.**

$$\mathcal{A} \models P_1 \wedge \dots \wedge P_n \iff \forall i \in \{1, \dots, n\}: \mathcal{A} \models P_i.$$

$$\mathcal{A} \models P_1 \vee \dots \vee P_n \iff \exists i \in \{1, \dots, n\}: \mathcal{A} \models P_i.$$

## Pätevyys ja looginen ekvivalenssi

**Määritelmä.** Lause  $\alpha \in \mathcal{L}$  on *pätevä/tautologia* (merkitään  $\models \alpha$ ), joss  $\mathcal{A} \models \alpha$  kaikille totuusjaketuille  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $\mathcal{P} = \{A\}$  ja  $\mathcal{L}$  vastaava kieli. Lause  $A \vee \neg A$  on pätevä, koska  $A \vee \neg A$  on tosi totuusjaketuissa  $\mathcal{A}_1 = \{\}$  ja  $\mathcal{A}_2 = \{A\}$ .

**Määritelmä.** Lauseet  $\alpha \in \mathcal{L}$  ja  $\beta \in \mathcal{L}$  ovat *loogisesti ekvivalentteja* ( $\alpha \equiv \beta$ ), joss  $\mathcal{A} \models \alpha \iff \mathcal{A} \models \beta$  kaikille totuusjaketuille  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ .

**Esimerkki.**  $A$  ja  $\neg\neg A$  ovat loogisesti ekvivalentit, koska näillä on sama totuusarvo kaikissa totuusjaketuissa.

**Huomio.** Kaikille  $\alpha \in \mathcal{L}$  ja  $\beta \in \mathcal{L}$  pätee  $\alpha \equiv \beta \iff \models \alpha \leftrightarrow \beta$ .

## Looginen seuraavuus

**Määritelmä.** Lause  $\alpha \in \mathcal{L}$  on lausejoukon  $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$  looginen seuraus (merkitään  $\Sigma \models \alpha$ ), jos  $\mathcal{A} \models \alpha$  kaikille lausejoukon  $\Sigma$  malleille  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ .

**Esimerkki.**  $\neg\neg A$  seuraa loogisesti lausejoukoista  $\{A\}$  ja  $\{A \wedge \neg A\}$ .

### Huomioita.

- Jos  $\Sigma \not\models \alpha$ , on olemassa **vastamalli**  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  siten, että  $\mathcal{A} \models \Sigma$  ja  $\mathcal{A} \not\models \alpha$  (vastaava käsite käytössä myös pätevyuden tapauksessa).
- $\models \alpha \iff \emptyset \models \alpha$ .
- $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \models \beta \iff \models \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ .
- $\Sigma \models \alpha \iff \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$  on toteutumaton.

Totuusjaku voidaan ymmärtää yhden *asiaintilan* kuvauksena.

**Esimerkki.** Lamppuesimerkin tapauksessa:

$\mathcal{A}_1 = \{P\}$ : Patterissa on riittävästi varausta.

Kytkin ei ole suljettu.

Lamppu ei pala.

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$ : Patterissa ei ole riittävästi varausta.

Lamppu palaa.

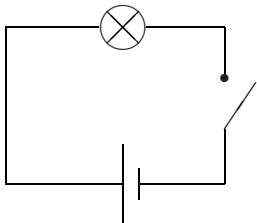
Kytkin on suljettu.

Näistä jälkimmäinen on mitä ilmeisimmin fyysisesti mahdoton, mutta kuitenkin loogisesti mahdollinen asiaintila.

Laaditaan täydellinen totuustaulukko lamppuesimerkin lausejoukolle  $\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$  ja lauseelle  $\neg L \vee K \in \mathcal{L}$ .

## Esimerkki

**Esimerkki.** Kuvataan seuraavaa yksinkertaista järjestelmää lauselogiikan lausein.



Valitaan atomisiksi lauseiksi

$L$  = "Lamppu palaa",

$K$  = "Kytkin on suljettu" ja

$P$  = "Paristossa on riittävästi varausta".

Määritellään järjestelmän sallitut tilat lauseilla

$\neg P \rightarrow \neg L$  ja

$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$ .

$P$	$L$	$K$	$\neg P$	$\neg L$	$\neg P \rightarrow \neg L$	$L \leftrightarrow K$	$P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$	$\neg L \vee K$
$T$	$T$	$T$	$E$	$E$	$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$T$	$E$	$E$	$E$	$T$	$E$	$E$	$E$
$T$	$E$	$T$	$E$	$T$	$T$	$E$	$E$	$T$
$T$	$E$	$E$	$E$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$
$E$	$T$	$T$	$T$	$E$	$E$	$T$	$T$	$T$
$E$	$T$	$E$	$T$	$E$	$E$	$E$	$T$	$E$
$E$	$E$	$T$	$T$	$T$	$T$	$E$	$T$	$T$
$E$	$E$	$E$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$

Lausejoukolla  $\Sigma$  on neljä erilaista mallia jotka vastaavat järjestelmän sallittuja tiloja.

Lause  $\neg L \vee K$  on tosi näissä kaikissa, joten  $\Sigma \models \neg L \vee K$ .

## Normaalimuodot

**Määritelmä.** Jos  $A$  on atominen lause, niin  $A$  ja  $\neg A$  ovat *literaaleja*.

**Määritelmä.** Lause  $\alpha$  on *konjunkttiivisessa normaalimuodossa*, jos  $\alpha$  on muodoltaan konjunktio  $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_n$ , missä jokainen  $\beta_i$  on literaaleista  $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$  koostuva disjunktio  $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{m_i}$ .

Disjunkttiivinen normaalimuoto määritellään samaan tapaan, mutta konjunktin ja disjunktin roolit vaihdetaan keskenään:

**Määritelmä.** Lause  $\alpha$  on *disjunkttiivisessa normaalimuodossa*, jos  $\alpha$  on muodoltaan disjunktio  $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_n$ , missä jokainen  $\beta_i$  on literaaleista  $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$  koostuva konjunktio  $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_{m_i}$ .

- (KNM) Lopuksi siirrä  $\wedge$ -konnektiivit  $\vee$ -konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad (6)$$

$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \rightsquigarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \quad (7)$$

- Tai (DNM) siirrä  $\vee$ -konnektiivit  $\wedge$ -konnektiivien ulkopuolelle:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \quad (8)$$

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \rightsquigarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \quad (9)$$

### Huomioita.

- Muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin.
- Normaalimuotoja voidaan usein yksinkertaistaa.
- Tietyille lauseille muunnossäännöt tuottavat normaalimuodon, jonka pituus on eksponentiaalinen lauseen pituuteen verrattuna. (Tämä voidaan välttää ottamalla käyttöön uusia atomeja).

## Normaalimuotojen johtaminen

Mikä hyvänsä lauselogiikan lause voidaan muuttaa konjunkttiiviseen (disjunkttiiviseen) normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä.

- Poista konnektiivit  $\leftrightarrow$  seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightsquigarrow (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \alpha) \quad (1)$$

- Poista konnektiivit  $\rightarrow$  seuraavanlaisilla korvauksilla:

$$\alpha \rightarrow \beta \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \beta \quad (2)$$

- Siirrä negatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen:

$$\neg \neg \alpha \rightsquigarrow \alpha \quad (3)$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \wedge \neg \beta \quad (4)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \neg \beta \quad (5)$$

**Esimerkki.** Muutetaan lause  $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$  konjunkttiiviseen ja disjunkttiiviseen normaalimuotoon.

$$A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$$

$$\rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \quad (1)$$

$$\rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (2)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (4)$$

Konjunkttiivinen normaalimuoto:

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (7)$$

$$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \quad (6)$$

$$\rightsquigarrow ((\neg A \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg A \vee (\neg C \vee B))) \wedge ((\neg B \vee (\neg B \vee C)) \wedge (\neg B \vee (\neg C \vee B))) \quad (6)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B)$$

Disjunkttiivinen normaalimuoto:

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) \quad (8)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B) \quad (9)$$

## Lauseiden klausuulimuoto

- Atomiset lauseet  $A$  ja niiden negaatiot  $\neg A$  ovat *literaaleja*.
- Literaalin komplementti:  $\overline{\overline{A}} = A$ ,  $\overline{\neg A} = A$ .
- Literaalien  $l_1, \dots, l_n$  disjunktio  $l_1 \vee \dots \vee l_n$  on *klausuuli*.
- Klausuulit kirjoitetaan usein muodossa  $\{l_1, \dots, l_n\}$ .
- Joukko klausuuleita  $S$  edustaa klausuuliensa konjunktia.

Huomaa ero:  $\neg A \vee B \vee \neg A \rightsquigarrow \{\neg A, B\}$ .

**Huomio.** Konjunkttiivinen normaalimuoto vastaa klausuulijoukkoa.

**Esimerkki.** Konjunkttiivista normaalimuotoa  $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$  vastaava klausuulijoukko on  $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$

## Prenex-normaalimuoto

Predikaattilogiikan lause  $\alpha$ , joka on muotoa  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \phi$ , missä kukin  $Q_i$  on kvanttori ( $\forall$  tai  $\exists$ ), ja alikaava  $\phi$  ei sisällä kvanttoreita, on *prenex*-normaalimuodossa.

**Esimerkki.** Seuraavat lauseet ovat prenex-normaalimuodossa:

$$\forall x \exists y \forall z \forall w (P(x, y, z) \rightarrow (Q(y, z, w) \rightarrow R(z, w, x))) \quad \forall x \exists y P(x, y)$$

Jokainen predikaattilogiikan lause voidaan muuttaa loogisesti ekvivalenttiin prenex-normaalimuotoon seuraavalla menettelyllä:

- Poistetaan konnektiivit  $\rightarrow$  ja  $\leftrightarrow$ :

$$\phi \rightarrow \psi \rightsquigarrow \neg \phi \vee \psi$$

$$\phi \leftrightarrow \psi \rightsquigarrow (\neg \phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \neg \psi)$$

## Lauselogiikan ja predikaattilogiikan suhde

- Predikaattilogiikka on lauselogiikan yleistys, jonka syntaksi ja semantiikka ovat monimutkaisemmat.
- Lauselogiikka saadaan predikaattilogiikan erikoistapauksena: atomiset lauseet vastaavat 0-paikkaisia predikaatteja.
- Toisaalta predikaattilogiikan päättely voidaan palauttaa lauselogiikan päättelyksi. Olkoon  $\Sigma$  predikaattilogiikan lausejoukko.
  - Muunnetaan  $\Sigma$  klausuulijoukoksi  $S$  siten, että  $\Sigma$  on toteutumaton  $\iff S$  on toteutumaton:

$$\Sigma \rightsquigarrow \text{prenex-muoto} \rightsquigarrow \text{skolemointi} \rightsquigarrow \text{KNM} \rightsquigarrow S$$

- $S$  on toteutumaton  $\iff S$ :n Herbrand-instanssien joukon  $S'$  äärellinen osajoukko  $S'' \subseteq S'$  on toteutumaton.

- Viedään lauserakenteen negaatiot sisään ja tuodaan kvanttorit ulos ( $z$  on uusi muuttuja):

$$\neg \neg \phi \rightsquigarrow \phi$$

$$\neg(\phi \wedge \psi) \rightsquigarrow \neg \phi \vee \neg \psi$$

$$\neg(\phi \vee \psi) \rightsquigarrow \neg \phi \wedge \neg \psi$$

$$\vec{Q}x \neg \forall y \phi \rightsquigarrow \vec{Q}x \exists y \neg \phi$$

$$\vec{Q}x \neg \exists y \phi \rightsquigarrow \vec{Q}x \forall y \neg \phi$$

$$\vec{Q}x (\forall y \phi \vee \psi) \rightsquigarrow \vec{Q}x \forall z (\phi(y/z) \vee \psi)$$

Viimeisestä säännöstä tarvitaan versiot, joissa disjunktit ovat päinvastaisessa järjestyksessä, joissa  $\forall$ :in tilalla  $\exists$ , ja jossa disjunktion sijasta konjunktio (7 sääntöä lisää).

## Eksistenssikvanttorien eliminointi

Olkoon  $\vec{Q}x\phi$  prenex-normaali muodossa s.e.  $\vec{Q}x$  sisältää kvanttorin  $\exists x_i$ .

- Jos  $\exists x_i$ :tä ei edellä ainutkaan universaalikvanttori, korvataan  $x_i$  uudella vakiolla  $c$ .
- Jos  $\exists x_i$ :tä edeltävät universaalikvanttorit  $\forall x_{n_1}, \forall x_{n_2}, \dots, \forall x_{n_m}$ , poistetaan kvanttori  $\exists x_i$ , ja korvataan  $x_i$ :n jokainen esiintymä termillä  $f(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_m})$ , missä  $f$  on uusi funktiosymboli.

**Huomio.** Looginen ekvivalenssi ei säily, mutta toteutuvuus säilyy.

**Esimerkki.** Lause  $\exists xP(x)$  ja sen skolemoitu muoto  $P(c)$ .

Nyt  $\models P(c) \rightarrow \exists xP(x)$ , mutta  $\not\models \exists xP(x) \rightarrow P(c)$ .

Vastamalli  $\mathcal{A}$ : universumi  $A = \{1, 2\}$ ,  $c^{\mathcal{A}} = 1$  ja  $P^{\mathcal{A}} = \{2\}$ .

## Herbrand-mallit

- Klausulijoukon  $S$  **Herbrand-universumi**  $U_S$  on niiden muuttujattomien termien joukko, joka voidaan muodostaa  $S$ :ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista. Jos  $S$ :ssä ei esiinny vakiosymboleja, otetaan käyttöön jokin vakiosymboli  $c$ .
- Klausulijoukon  $S$  **Herbrand-kanta**  $B_S$  koostuu atomisista lauseista, jotka voidaan konstruoida käyttäen  $S$ :ssä esiintyviä predikaattisymboleja ja Herbrand-universumin termejä.
- Klausulijoukon  $S$  **Herbrand-mallit** ovat Herbrand-kannan  $B_S$  osajoukkoja ja ne voidaan tulkita lauselogiikan totuusjakeiluiksi.
- Klausulijoukon  $S$  **Herbrand-instanssien** joukko  $S'$  saadaan korvaamalla  $S$ :n klausulien muuttujat klausuuli klausuulilta kaikilla mahdollisilla  $U_S$ :n termien kombinaatioilla.

## Klausuulimuoto predikaattilogiikassa

Mikä tahansa predikaattilogiikan lause voidaan saattaa klausuulimuotoon seuraavalla menettelyllä:

1. Haetaan prenex-normaali muoto.
2. Muunnetaan tämä konjuktiivinen normaalimuotoon.
3. Mikäli KNM sisältää eksistenssikvanttoreita, skolemoidaan.
4. Kirjoitetaan klausuuliesitys (joukko literaalien joukkoja).

**Esimerkki.** Haetaan klausuuliesitys lauseelle

$$\forall x(\neg(P(x) \rightarrow \forall yQ(x,y)) \vee R(x)):$$

$$\rightsquigarrow \forall x\exists z((P(x) \wedge \neg Q(x,z)) \vee R(x)) \quad (1)$$

$$\rightsquigarrow \forall x\exists z((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x,z) \vee R(x))) \quad (2)$$

$$\rightsquigarrow \forall x((P(x) \vee R(x)) \wedge (\neg Q(x, f(x)) \vee R(x))) \quad (3)$$

$$\rightsquigarrow \{\{P(x), R(x)\}, \{\neg Q(x, f(x)), R(x)\}\} \quad (4)$$

**Esimerkki.** Olkoon klausulijoukko

$$S = \{\{-P(x), Q(f(x,x))\}, \{P(c)\}\}.$$

Klausulijoukossa esiintyvät vakio  $c$  ja funktiosymboli  $f(\cdot, \cdot)$ .

- Herbrand-universumi  
 $U_S = \{c, f(c,c), f(f(c,c),c), f(c, f(c,c)), f(f(c,c), f(c,c)), \dots\}$ .
- Herbrand-kanta  $B_S = \{P(c), Q(c), P(f(c,c)), Q(f(c,c)), \dots\}$ .
- Herbrand-instanssien joukko  $S' =$   
 $\{\{P(c)\}, \{\neg P(c), Q(f(c,c))\},$   
 $\{\neg P(f(c,c)), Q(f(f(c,c), f(c,c)))\}, \dots\}$ .
- Esim.  $\mathcal{A} = \{P(c), Q(f(c,c))\}$  on  $S'$ :n ja  $S$ :n Herbrand-malli.

## Tietämyksen esittäminen

Tietämyksen esittämisen kannalta on usein järkevää nimetä universumin alkiot yksikäsitteisesti:

- Jokaisen vakiosymbolin viitattava eri alkioon (unique names):

$$\neg(a = b), \neg(b = c), \neg(c = a)$$

- Ei muita objekteja kuin nimetyt (domain closure):

$$\forall x(x = a \vee x = b \vee x = c)$$

☞ Voidaan rajautua Herbrand-mallien tarkasteluun

☞ Jos klausuulimuodossa ei esiinny funktiosymboleja, Herbrand-instansseja muodostuu äärellinen määrä ja keskeiset loogiset päätösongelmat (toteutuvaus, jne.) säilyvät tällöin ratkeavina.

## Johtopäätöksiä

Lauselogiikka on monien sovellusten kannalta riittävä:

- Tarvittaessa rakententeeltaan samankaltaisia lauseita voidaan pakata yhdeksi lauseeksi muuttujien avulla: esim.  $P(x) \rightarrow Q(x)$ .
- Ongelmaksi jää tällöin instantioinnin järjestäminen järkevästi (tehdääkö instantiointi kerralla vai tarpeen mukaan).
- Yksi luonteva mahdollisuus on rajoittaa/kontrolloida instantiointia erityisten domain-predikaattien  $D(x)$  avulla:

$$\begin{array}{l} D(x) \wedge P(x) \rightarrow Q(x). \\ D(a). D(b). D(c). \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} P(a) \rightarrow Q(a). \\ P(b) \rightarrow Q(b). \\ P(c) \rightarrow Q(c). \end{array}$$