

## LISÄÄ MODAALILOGIIKOISTA

1. Äärellisen mallin ominaisuus
2. Ratkeavuus
3. Käännös predikaattilogiikkaan
4. Multimodaalilogiikat
5. Laskennallinen vaativuus

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.10, 1.12 ja 1.14 (s. 403 – 405, 408 – 410 ja 416 – 419).

## Äärellisen mallin ominaisuus

**Määritelmä.** Modaalilogiikalla  $L$  on **äärellisen mallin ominaisuus**, jos jokaisella lauseella  $P$ , joka ei ole  $L$ -pätevä, on olemassa äärellinen  $L$ -malli, jonka jossain tilassa  $P$  on epätosi.

- Jos logiikalla on äärellisen mallin ominaisuus, sen ei-pätevien lauseiden joukko on puoli-ratkeava.

(Muodostetaan systemaattisesti kaikki äärelliset mallit ja tarkistetaan kunkin osalta, onko lause epätosi ko. mallissa.)

- Täten: jos modaalilogiikalla  $L$  on sekä todistusteoria että äärellisen mallin ominaisuus, niin  $L$  on ratkeava.
- Miten äärellisen mallin ominaisuus voidaan käytännössä osoittaa?

⇒ **Filtraatio.**

## 1. Äärellisen mallin ominaisuus

### Ratkeavuus ja puoli-ratkeavuus

- Tarkastelemme seuraavassa modaalilogiikkojen laskennallisia ominaisuuksia. Kuten tavallista käytämme formaalina laskennan mallina Turingin konetta ja tarkoitamme algoritmilla periaatteessa vastaavalla Turingin koneella toteutettavissa olevaa laskentaa.
- Logiikka  $L$  on **ratkeava**, jos on olemassa algoritmi, joka ratkaisee syötteen annettun lauseen  $P$  osalta, onko lause  $L$ -pätevä vai ei.
- Jos logiikalla  $L$  on todistusteoria (esim. Hilbert-tyylinen), logiikka on **puoli-ratkeava**: on olemassa algoritmi, joka pysähtyy ja vastaa kyllä, kun sille annetaan syötteen  $L$ -pätevä lause  $P$ .  
(Muodostetaan kaikki todistukset jollain systemaattisella tavalla.)

⇒ Pätevien lauseiden joukko on rekursiivisesti numeroituva.

## Esimerkki filtraatiosta (modaalilogiikka $K$ )

**Teoreema.** Modaalilogiikalla  $K$  on äärellisen mallin ominaisuus.

**Todistus.** Oletetaan, ettei lause  $Q$  ole  $K$ -pätevä. Tällöin on olemassa malli  $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$  ja maailma  $s_0 \in S$  siten, että  $\mathcal{M}, s_0 \not\models Q$ .

Muodostetaan filtraatiolla mallista  $\mathcal{M}$  äärellinen malli  $|\mathcal{M}|$ . Olkoon  $\text{Sub}(Q)$  lauseen  $Q$  kaikkien alilauseiden joukko.

- Määritellään ekvivalenssirelaatio  $\sim$  joukolle  $S$ :  $s \sim t$  jos kaikille  $P \in \text{Sub}(Q)$ ,  $\mathcal{M}, s \models P$  joss  $\mathcal{M}, t \models P$ .
- Olkoon  $|s| = \{t \in S : t \sim s\}$  ja  $|S| = \{|s| : s \in S\}$ .  $|S|$  on äärellinen: siinä on korkeintaan  $2^n$  jäsentä, missä  $n$  on lauseen  $Q$  alilauseiden määrä.

**Filtraatio (jatkoa)**

Olkoon malli  $\mathcal{M} = \langle |S|, |R|, |v| \rangle$ , missä relaatio  $|R|$ :

$|s||R||t|$  joss on olemassa  $s' \in |s|$  ja  $t' \in |t|$  siten, että  $s'Rt'$

ja valuaatio  $|v|$ :  $|v|(|s|, P) = v(s, P)$ .

Osoitetaan rakenteisella induktiolla, että kaikille  $P \in \text{Sub}(Q)$  pätee:

$\mathcal{M}, s \Vdash P$  joss  $\mathcal{M}|, |s| \Vdash P$ .

- $P$  on atomilause:  $|v|(|s|, P) = v(s, P)$ .
- $\neg P$ :  $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$  joss  $\mathcal{M}, s \not\Vdash P$  joss (IH)  
 $\mathcal{M}|, |s| \not\Vdash P$  joss  $\mathcal{M}|, |s| \Vdash \neg P$ .  
 ...
- $\Box P$ : ( $\Leftarrow$ ) Olkoon  $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$ . Siis löytyy  $t$ , jolle  $sRt$  ja  $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$ . Täten  $|s||R||t|$  ja  $\mathcal{M}|, |t| \not\Vdash P$  (IH) ja  $\mathcal{M}|, |s| \not\Vdash \Box P$ .

**2. Ratkeavuus**

- Jos vastamallien koolle voidaan antaa yläraja, logiikka on ratkeava.
- Näin ei saada kovin tehokkaita ratkaisumenetelmiä.
- Taulumenetelmä tehokkaampi lähestymistapa.

**Esimerkki.** Logiikka **K** voidaan todistaa ratkeavaksi näyttämällä, että edellä annettu logiikan **K** ratkaisuproseduuri pysähtyy väistämättä.

Todistuksessa tarvitaan **Königin lemma**:

**Lemma.** Jos puussa on ääretön määrä solmuja mutta jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsisolmuja, puussa on ääretön haara.

**Filtraatio (päättyy)**

- $\Box P$ : ( $\Rightarrow$ ) Olkoon  $\mathcal{M}|, |s| \not\Vdash \Box P$ . Täten on olemassa  $|t|$ , jolle  $|s||R||t|$  ja  $\mathcal{M}|, |t| \not\Vdash P$ . Siis  $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$  (IH). Täten löytyy  $s' \in |s|$  ja  $t' \in |t|$ , joille  $s'Rt'$  ja  $\mathcal{M}, t' \not\Vdash P$ . Siis  $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$ , jolloin  $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$ .

Teoreema seuraa tästä tuloksesta:

- Koska  $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash Q$  ja  $Q \in \text{Sub}(Q)$ ,  $\mathcal{M}|, |s_0| \not\Vdash Q$ .
- Täten logiikalla **K** on äärellisen mallin ominaisuus.

Useilla muillakin normaaleilla modaali-logiikoilla on äärellisen mallin ominaisuus (esim. T, K4, S4, KB, B, S5, D, D4, DB, KD45).

**Ratkaisuproseduuri lauseen  $P$  K-pätevyydelle**

1. Merkitään taulun juureen  $\langle 1 \rangle \neg P$ .

2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu  $\sigma Q$ .

2.2 Jos  $Q$  ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle  $\sigma Q$  kautta kulkevalle haaralle  $\theta$  jokin seuraavista:

- Jos  $\sigma Q$  on muotoa  $\sigma \alpha$ , jatketaan haaraa  $\theta$  solmuilla  $\sigma \alpha_1$  ja  $\sigma \alpha_2$ .
- Jos  $\sigma Q$  on muotoa  $\sigma \beta$ , lisätään haaran  $\theta$  loppuun kaksi lapsisolmuja  $\sigma \beta_1$  ja  $\sigma \beta_2$  (haarautuminen).
- Jos  $\sigma Q$  on muotoa  $\sigma \neg \Box P$ , lisätään haaran  $\theta$  loppuun solmu  $\sigma \neg P$  jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle  $\sigma \neg$  sekä tämän jälkeen  $\sigma \neg X$  kullekin haarassa esiintyvälle  $\sigma \Box X$ .
- Jos  $\sigma Q$  on muotoa  $\sigma \Box P$ , lisätään kaikille haarassa  $\theta$  tarjolla oleville  $\sigma \neg$ :n loppuun solmu  $\sigma \neg P$ , jos tämä ei esiinny  $\theta$ :ssa.

2.3 Merkitään  $\sigma Q$  käytetyksi.

**Propositio.** Edellä annettu modaalilogiikan  $K$  ratkaisuproseduuri pysähtyy jokaiselle lauseelle  $P$  äärellisen askelmäärän jälkeen.

**Todistus.** Oletetaan, että proseduuri ei pysähdy jollekin lauseelle  $P$ .

- Tuloksena on ääretön  $K$ -taulu, joka on puu, jossa jokaisella solmulla on korkeintaan kaksi lasta.
- Königin lemman perusteella taulussa on ääretön haara  $\theta$ .
- Haarassa  $\theta$  on ääretön määrä prefiksoituja lauseita, jotka ovat kaikki erilaisia (oletetaan, että proseduuri lisää prefiksoidun lauseen haaraan vain, jos se ei vielä esiinny siinä).
- Jokaiselle prefiksille  $\sigma$ : jos  $\sigma Q$  esiintyy haarassa  $\theta$ ,  $Q$  on lauseen  $P$  alilause tai sen negaatio. Koska alilauseita on vain äärellinen määrä, jokainen prefiksi voi esiintyä vain äärellisen monta kertaa.
- Täten haarassa  $\theta$  esiintyy äärettömän monta erilaista prefiksiä.

### Todistus (jatkuu)

⇒ Vaihtoehto (i) ei voi toteutua, joten (ii) haarassa  $\theta$  on äärellisen monta  $n$ -mittaista prefiksiä jokaiselle luonnolliselle luvulle  $n$ .

- Koska prefiksejä on haarassa  $\theta$  äärettömän monta, siinä on oltava äärettömän monen mittaisia prefiksejä.
- Näytetään, että tämä on mahdotonta osoittamalla, että jokaiselle haaran lauseelle  $\sigma Q$  pätee ominaisuus L: prefiksin  $\sigma$  pituuden summa lauseen  $Q$  modaalioperaattoreiden määrän kanssa on aina pienempi tai yhtä suuri kuin  $1 + m$ , missä  $m$  lauseen  $P$  modaalioperaattoreiden määrä.
- Selvästi (L) pätee taulun juurelle  $\langle 1 \rangle \neg P$ .
- Jos lause on saatu  $\alpha$ - tai  $\beta$ -säännöllä lauseesta, jolle (L) pätee, pätee se myös uudelle prefiksoidulle lauseelle.

### Todistus (jatkuu)

On kaksi mahdollisuutta:

(i) Haarassa  $\theta$  on äärettömän monta samanmittaista prefiksiä.

- Olkoon  $n$  pienin luonnollinen luku siten, että haarassa on äärettömän monta  $n$ -mittaista prefiksiä.
- Nyt välttämättä  $n \neq 1$ , koska ainoa yhdenmittainen prefiksi on  $\langle 1 \rangle$  ja se esiintyy äärellisen monta kertaa haarassa  $\theta$ .
- Kun  $n > 1$ , ainoa tapa tuottaa  $n$ -mittainen prefiksi on käyttää  $\neg \square$ - tai  $\square$ -sääntöä lauseelle  $\sigma Q$ , jossa prefiksin  $\sigma$  mitta on  $n - 1$ .
- Siis jos haarassa on äärettömän monta  $n$ -mittaista prefiksiä, siinä on oltava äärettömän monta  $(n - 1)$ -mittaista prefiksiä. Tämä on ristiriidassa luvun  $n$  valinnan kanssa.

### Todistus (päättyy)

- Jos lause on saatu  $\square$ - tai  $\neg \square$ -säännöllä, se on muotoa  $\sigma k Q$  ja se on saatu muotoa  $\sigma Q'$  olevasta lauseesta. Oletetaan, että (L) pätee lauseelle  $\sigma Q'$ . Nyt prefiksin  $\sigma k$  mitta on  $1 +$  prefiksin  $\sigma$  mitta mutta lauseessa  $Q$  on vastaavasti yksi modaalioperaattori vähemmän kuin lauseessa  $Q'$ . Siis (L) pätee myös lauseelle  $\sigma k Q$ .

- Koska (L) pätee kaikille haaran prefiksoiduille lauseille, haarassa voi esiintyä vain prefiksejä, joiden mitta on korkeintaan  $m + 1$ .

⇒ Vaihtoehto (ii) on mahdoton ja proseduuri pysähtyy kaikille  $P$ .

- Vastaava ratkaisumenetelmä toimii käsitellyille modaalilogiikoille, joiden kehykset eivät ole transitiivisia.
- Transitiivisuutta varten tarvitaan vahvempi lopetusehto (ts. ehto sille, milloin haaran laajentaminen voidaan lopettaa).

### 3. Käännös predikaattilogiikkaan

Modaalilogiikka voidaan kääntää rajoitettuun predikaattilogiikan osajoukkoon.

- Jokaiselle modaalilogiikan atomilauseelle  $P$  on vastaava yksipaikkainen predikaattisymboli  $P$ .
- Kaksi eri muuttujaa  $x_1$  ja  $x_2$ .  
Sopimus: jos  $x$  on toinen näistä,  $x'$  on toinen.
- Kaksipaikkainen predikaattisymboli  $R$ .

### Kuvaus $\tau$ säilyttää semantiikan

**Teoreema.** Olkoon  $P$  mikä tahansa modaalilause.

1.  $P$  on **K**-pätevä joss  $\forall x_1 \tau(P, x_1)$  on pätevä predikaattilogiikassa.
  2.  $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$  joss  $\tau(\Sigma) \models_{\text{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$ ,  
missä  $\tau(\Sigma) = \{\forall x_1 \tau(Q, x_1) \mid Q \in \Sigma\}$  ja  
 $\models_{\text{cl}}$  tarkoittaa loogista seuraavuutta predikaattilogiikassa.
- Modaalilogiikka **T**:  
 $P$  on **T**-pätevä joss  $\{\forall x_1 R(x_1, x_1)\} \models_{\text{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$ .
  - Modaalilogiikka **S5**:  
 $P$  on **S5**-pätevä joss  $\Sigma_{\mathbf{S5}} \models_{\text{cl}} \forall x_1 \tau(P, x_1)$   
missä  $\Sigma_{\mathbf{S5}} = \{\forall x_1 R(x_1, x_1), \forall x_1 \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow R(x_2, x_1)), \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (R(x_1, x_2) \wedge R(x_2, x_3) \rightarrow R(x_1, x_3))\}$ .

**Määritelmä.** Olkoon  $\tau$  seuraava kuvaus modaalilauseilta ja muuttujilta predikaattilogiikan lauseille:

1.  $\tau(\top, x) = \top$ ;  $\tau(\perp, x) = \perp$ ;
2.  $\tau(P, x) = P(x)$  atomilauseelle  $P$ ;
3.  $\tau(\neg P, x) = \neg \tau(P, x)$ ;
4.  $\tau(P \rightarrow Q, x) = \tau(P, x) \rightarrow \tau(Q, x)$ ;
5.  $\tau(\Box P, x) = \forall x' (R(x, x') \rightarrow \tau(P, x'))$ ;

**Esimerkki.**  $\tau(\neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P, x_1) = \tau(\neg \Box P, x_1) \rightarrow \tau(\Box \neg \Box P, x_1)$   
 $= \neg \tau(\Box P, x_1) \rightarrow \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow \tau(\neg \Box P, x_2))$   
 $= \neg (\forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow \tau(P, x_2))) \rightarrow \forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow \neg \tau(\Box P, x_2))$   
 $= \neg (\forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2))) \rightarrow$   
 $\forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow \neg (\forall x_1 (R(x_2, x_1) \rightarrow \tau(P, x_1))))$   
 $= \neg (\forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2))) \rightarrow$   
 $\forall x_2 (R(x_1, x_2) \rightarrow \neg (\forall x_1 (R(x_2, x_1) \rightarrow P(x_1))))).$

### 4. Multimodaalilogiikat

**Esimerkki.** Monen agentin tietämyslogiikka  $\mathbf{S5}_n$ :

- $n$  agenttia ja vastaavat tietämysoperaattorit  $K_i, i = 1, \dots, n$ .  
Esim. väittämiä muotoa  $K_1 K_2 \neg K_1 P$ .
- Mallit rakenteeltaan monikkoja  $\langle S, R_1, \dots, R_n, v \rangle$ :  
 $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$  joss  $\mathcal{M}, t \Vdash P$  kaikille  $t \in S$ , joille  $s R_i t$ .
- (Hilbert) todistusteoria koostuu **S5**-aksiomista kaikille  $K_i$ .
- Kaikki tietävät (**EP**):  
 $\mathcal{M}, s \Vdash EP$  joss  $\mathcal{M}, s \Vdash K_i P$  kaikille  $i = 1, \dots, n$ .
- **Aksioma:**  $EP \leftrightarrow K_1 P \wedge \dots \wedge K_n P$ .

**Yleinen tietäminen (engl. common knowledge): CP**

- $\mathcal{M}, s \models CP$  joss  $\mathcal{M}, s \models E^k P$  kaikille  $k = 1, 2, \dots$   
 $\implies \mathcal{M}, s \models CP$  joss  $\mathcal{M}, t \models P$  kaikille  $t \in S$ ,  
 joille maailma  $t$  on C-saavutettavissa tilasta  $s$   
 (eli on olemassa  $k \geq 1$  ja jono  $(s =)t_0, t_1, \dots, t_k(= t)$ ,  
 missä kaikille  $j = 0, \dots, k-1$  pätee  $t_j R_i t_{j+1}$  jollekin  
 $i, 1 \leq i \leq n$ .)
- **Aksioma:**  $CP \rightarrow E(P \wedge CP)$ .
- **Päätelysääntö:**

$$\frac{P \rightarrow E(Q \wedge P)}{P \rightarrow CQ}$$
- **Esim.**  $CP \rightarrow K_1 K_2 \dots K_n P$  on  $S5_n$ -pätevä.

**Mallintarkastamisen laskennallinen vaativuus**

- Lauseen totuus annetun mallin annetussa maailmassa on tarkastettavissa polynomisessa ajassa (annetun mallin ja lauseen pituuteen nähden) kaikilla käsittelyillä modaalilogiikoilla.
- Tätä ominaisuutta ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla (kuten esim. tietyt temporaalilogiikat).
- Kaikki ongelmat, jotka voidaan ratkaista polynomisessa ajassa, voidaan palauttaa propositionaaliseen mallintarkastukseen. Boolean piirin evaluointi muodostaa P-täydellisen ongelman!

**5. Laskennallinen vaativuus**

Erilaisia tehtävänasetteluja:

- Mallintarkastus (Onko lause tosi annetussa mallissa?)
- Toteutuvuus (Onko lauseella mallia?)
- Pätevyys
- Looginen seuraavuus

Tarkastellaan näistä mallintarkastusta ja toteutuvuutta, koska

1. lause  $P$  on pätevä joss  $\neg P$  **ei ole** toteutuva ja
2.  $\{\} \models_L \{Q_1, \dots, Q_n\} \implies P$  joss  
 $(Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \rightarrow P$  on pätevä joss  
 $Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n \wedge \neg P$  **ei ole** toteutuva.

**Toteutuvuustarkastuksen laskennallinen vaativuus**

- Vastaava päätösongelma on NP-täydellinen lauselogiikalle.
- Kaikki modaalilogiikat sisältävät erikoistapauksena lauselogiikan, joten niille toteutuvuusongelma on NP-kova.
- Modaalilogiikoille  $S5$ ,  $KD45$  ongelma on NP-täydellinen. Näille logiikoille löytyy aina pieni vastamalli (maailmojen määrä  $\approx$  alilauseiden määrä), josta seuraa, että toteutuvuus kuuluu luokkaan NP.
- Modaalilogiikoille  $K$ ,  $T$ ,  $S4$  ongelma on **PSPACE**-täydellinen. Vastamalli voi olla eksponentiaalinen lauseen kokoon nähden.
- Modaalilogiikoille  $S5_n$ ,  $KD45_n$  ongelma on **PSPACE**-täydellinen.
- Modaalilogiikoille  $S5_n^C$ ,  $KD45_n^C$  ongelma on **EXPTIME**-täydellinen.