MODAALILOGIIKKOJEN TODISTUSTEORIAA

1. Hilbert-tyylinen todistusteoria
2. Virheettömyys
3. Täydellisyys
4. Yleistys lokaaleille premisseille
5. Esimerkkejä ($\mathbf{T}$, $\mathbf{S5}$ ja $\mathbf{KD45}$)

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luku 1.7 (s. 387 – 391).

Todistusjärjestelmät yleisesti

Todistusjärjestelmä on (syntaktinen) kalkyyli, jolla osoitetaan, että annettu lause on pätevä/seuraa loogisesti lausejoukosta.

Antaa lähtökohdan päättelyn automatisoinnille.

Erilaisia todistusjärjestelmiä:

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio

1. Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle $\mathbf{K}$:

Klassiset aksiomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö: $\dfrac{P, P \to Q}{Q}$

Välttämättömyyssääntö (N-sääntö): $\dfrac{P}{\Box P}$

Johto ja todistus

(Käsitellään ensin tapausta, jossa ei ole käytössä lokaaleja premissejä.)

Määritelmä. Lauseen P $\mathbf{K}$-*johto* lausejoukosta Σ on äärellinen jono lauseita $\phi_1, \dots, \phi_n$ siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \dots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. ϕ_i on joku $\mathbf{K}$:n aksiomista tai
3. ϕ_i saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

Merkintätapa: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$)

Lauseen P $\mathbf{K}$-*todistus* on lauseen P $\mathbf{K}$-johto tyhjästä lausejoukosta.

Merkintätapa: $\emptyset \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (tai $\vdash_{\mathbf{K}} P$)

Esimerkki

Näytetään lause $\top \leftrightarrow \Box\top$ $\mathbf{K}$-todistuvaksi:

1.	$\top$	(Taut)
2.	$\Box\top \rightarrow (\top \rightarrow \Box\top)$	(Taut)
3.	$\Box\top$	(N, 1)
4.	$\top \rightarrow \Box\top$	(MP, 2, 3)
5.	$\top \rightarrow (\Box\top \rightarrow \top)$	(Taut)
6.	$\Box\top \rightarrow \top$	(MP, 1, 5)
7.	$(\Box\top \rightarrow \top) \rightarrow ((\top \rightarrow \Box\top) \rightarrow (\top \leftrightarrow \Box\top))$	(Taut)
8.	$(\top \rightarrow \Box\top) \rightarrow (\top \leftrightarrow \Box\top)$	(MP, 6, 7)
9.	$\top \leftrightarrow \Box\top$	(MP, 4, 8)

Johdettuja sääntöjä (I)

R-sääntö: $\dfrac{P \rightarrow Q}{\Box P \rightarrow \Box Q}$

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$\Box(P \rightarrow Q)$	(N, 1)
3.	$\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$	(K)
4.	$\Box P \rightarrow \Box Q$	(MP, 2, 3)

Yleistetty R-sääntö: $\dfrac{P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \rightarrow Q}{\Box P_1 \wedge \cdots \wedge \Box P_n \rightarrow \Box Q}$

Johdettuja sääntöjä (II)

R$\Diamond$-sääntö: $\dfrac{P \rightarrow Q}{\Diamond P \rightarrow \Diamond Q}$

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	(Taut)
3.	$\neg Q \rightarrow \neg P$	(MP, 1, 2)
4.	$\Box\neg Q \rightarrow \Box\neg P$	(R, 3)
5.	$(\Box\neg Q \rightarrow \Box\neg P) \rightarrow (\neg\Box\neg P \rightarrow \neg\Box\neg Q)$	(Taut)
6.	$\neg\Box\neg P \rightarrow \neg\Box\neg Q$	(MP, 4, 5)

2. Virheettömyys

Todistusmenetelmän virheettömyys:

Jos lause on johdettavissa, se on myös looginen seuraus.

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ (lyhyemmin merkittynä: jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P$).

Todistus.

Olkoon lauseelle P $\mathbf{K}$-johto $\phi_1, \ldots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta Σ.

Todistetaan induktiolla $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \phi_i$ (eli ϕ_i on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä) kaikille $i = 1, \ldots, n$.

Siis todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \ldots, n$, että $\mathbf{C} \models \phi_i$, missä $\mathbf{C} = \{M \mid M \models \Sigma\}$.

Induktiotodistus

- ($i = 1$): Jos $\phi_1 \in \Sigma$, selvästi $\mathbf{C} \models \phi_1$ (joukon $\mathbf{C}$ määritelmä).
  Jos ϕ_1 on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$, niin $\mathbf{C} \models \phi_1$ jokaiselle mallijoukolle $\mathbf{C}$
  [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]
- ($i > 1$): Kuten yllä, jos $\phi_i \in \Sigma$, on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$, niin $\mathbf{C} \models \phi_i$.
  Jos ϕ_i on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä, induktio-oletuksen mukaan ko. aiemmat lauseet ovat $\mathbf{C}$-päteviä. Koska $\mathbf{C}$-pätevien lauseiden joukko on suljettu MP- ja N-säännön suhteen [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema], $\mathbf{C} \models \phi_i$.

Siis kaikille $i = 1, \ldots, n$, ϕ_i on $\mathbf{C}$-pätevä, joten $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \phi_i$.
Näin ollen $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P (= \phi_n)$. ∎

3. Täydellisyys

Todistusmenetelmän täydellisyys:

Jos lause looginen seuraus, se on myös johdettavissa.

Teoreema. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P$, niin $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$.

Todistuksen idea: Oletetaan, että $\Sigma \nvdash_{\mathbf{K}} P$.

Jatkossa osoitetaan, että $\Sigma \not\models_{\mathbf{K}} P$.

Tämä tehdään muodostamalla kanoninen malli $\mathcal{M}$, missä kaikki joukon Σ lauseet ovat päteviä ja kaikilla Q, joille $\Sigma \nvdash_{\mathbf{K}} Q$, on olemassa mallin maailma s, jossa $\mathcal{M}, s \not\Vdash Q$.

Mallin maailmat ovat maksimaalisesti konsistentteja lausejoukkoja, jotka konstruoidaan Lindenbaumin lemman avulla premissijoukosta Σ.

(Epä)konsistentit joukot

Määritelmä. Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ sanotaan *Σ-epäkonsistentiksi*, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

Huom. Tyhjä joukko on Σ-epäkonsistentti, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg\top$.

Määritelmä. Joukkoa $\mathbf{A}$ sanotaan *Σ-konsistentiksi*, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole Σ-epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle P ei ole olemassa $\mathbf{K}$-johtoa lausejoukosta Σ, lausejoukko $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti.

($\emptyset$ on myös Σ-konsistentti, koska $\neg\top \to P$ on $\mathbf{K}$-todistuva/tautologia.)

Aputuloksia

Lemma 1. Jos joukko S on Σ-konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko $S' \subseteq S$.

Todistus. Jos jokin alijoukko ei olisi Σ-konsistentti, olisi olemassa sen Σ-epäkonsistentti alijoukko A, mutta $A \subseteq S$, joten S ei olisi Σ-konsistentti, ristiriita. ∎

Lemma 2. Jos joukko $\mathbf{A}$ on Σ-konsistentti ja $\neg\Box Z \in \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on myös Σ-konsistentti, missä $\mathbf{A}^{\#} = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

Todistus. Oletetaan, että $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ on Σ-epäkonsistentti.

Tällöin on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^{\#}$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

(koska $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$ on tautologia).

Jatketaan johtoa:

1.	$\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg Z)$	
2.	$\neg\top \vee \neg A_1 \vee \cdots \vee \neg A_n \vee Z$	$(\text{Prop}, 1)$
3.	$(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow Z$	$(\text{Prop}, 2)$
4.	$(\Box\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	$(\text{GR}, 3)$
5.	$\Box\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	$(\text{Prop}, 4)$
6.	$\top \rightarrow \Box\top$	(Ks. s. 5)
7.	$\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$	$(\text{Prop}, 5, 6)$
8.	$(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$	$(\text{Prop}, 7)$
9.	$\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \cdots \wedge \Box A_n \wedge \neg\Box Z)$	$(\text{Prop}, 8)$

$\Longrightarrow$ **A** on Σ-epäkonsistentti (ristiriita), joten $\mathbf{A}^{\#} \cup \{\neg Z\}$ Σ-konsistentti. ■

Lindenbaumin lemma

Määritelmä. Γ on maksimaalisesti Σ-konsistentti, jos Γ on Σ-konsistentti ja kaikki ylijoukot $\Gamma' \supset \Gamma$ ovat Σ-epäkonsistentteja.

Lemma 3. (Lindenbaum) Jokainen Σ-konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ-konsistentiksi joukoksi.

Todistus. Olkoon **A** Σ-konsistentti. Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon $Q_0, Q_1, \ldots$ ja määritellään joukot $\Delta_0, \Delta_1, \ldots$ ja Δ seuraavasti:

$\Delta_0 = \mathbf{A}$.

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}\ \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$$

(i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$

(ii) Kaikille $i = 0, 1, \ldots$, joukko Δ_i on Σ-konsistentti.

Δ_0 on Σ-konsistentti.

Olkoon Δ_{i-1} on Σ-konsistentti.

Oletetaan, että Δ_i on Σ-epäkonsistentti. Tällöin $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja $\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ ovat Σ-epäkonsistentteja.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$$

sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1}).$$

Jatketaan näihin liittyviä johtoja:

1.	$\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Q_{i-1})$	
2.	$\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Q_{i-1})$	
3.	$Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$	$(\text{Prop}, 1)$
4.	$\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$	$(\text{Prop}, 2)$
5.	$\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+) \vee$	
	$\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$	$(\text{Prop}, 3, 4)$
6.	$\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$	$(\text{Prop}, 5)$

$\Longrightarrow$ Δ_{i-1} on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

(iii) Unioni Δ on Σ-konsistentti.

Oletetaan, että Δ on Σ-epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n).$$

Täten on olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.

$\Longrightarrow$ Δ_i on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) Unioni Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti.

Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ Σ-konsistentti jollekin $Z \notin \Delta$.

Koska $Z = Q_i$ jollakin i, $\Delta \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti.

Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, myös $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on Σ-konsistentti [Lemma 1].

Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$, ristiriita.

(i-iv) $\Longrightarrow$ Δ on maksimaalisesti Σ-konsistentti joukon **A** laajennus. ■

Aputuloksia (jatkoa)

Lemma 4. Kaikille maksimaalisesti Σ-konsistenteille joukoille Γ, (i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z.

Todistus. (i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$. Tällöin $\Gamma \cup \{Z\}$ on Σ-epäkonsistentti ja on olemassa $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$. Jatketaan kyseistä johtoa:

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge Z)$
2. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ $\quad(\mathrm{Prop}, 1)$
3. Z $\quad(\mathrm{GP})$
4. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$ $\quad(\mathrm{MP}, 2, 3)$

Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_n)$.

$\Longrightarrow$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.

(ii) Koska Γ on Σ-konsistentti, $\{Z, \neg Z\} \not\subseteq \Gamma$ ($\neg(\top \wedge Z \wedge \neg Z)$ tautologia). Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \ldots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
sekä $\{A_1^-, \ldots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan kyseisiä johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+)$ $\quad(\mathrm{Prop}, 1)$
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $\quad(\mathrm{Prop}, 2)$
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \cdots \wedge A_{n^+}^+ \wedge A_1^- \wedge \cdots \wedge A_{n^-}^-)$ $\quad(\mathrm{Prop}, 3, 4)$

$\Longrightarrow$ Γ on Σ-epäkonsistentti, ristiriita.

Siis joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z. ■

Kanoninen malli

Konstruoidaan kanoninen malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ seuraavasti:

- S on kaikkien maksimaalisesti Σ-konsistenttien joukkojen luokka.
- Kaikille $s, t \in S$: sRt joss $s^{\#} \subseteq t$.
- Kaikille atomilauseille Q: $v(s, Q) = \mathrm{true}$ joss $Q \in s$.

Lemma 5. Kaikille lauseille Q, kaikille $s \in S$ pätee:

$$\mathcal{M}, s \Vdash Q \text{ joss } Q \in s.$$

Todistus. Käytetään rakenteista induktiota:

- Lause $\perp$: $\mathcal{M}, s \nVdash \perp$.

  Oletetaan, että $\perp \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge \perp)$, joukko s on Σ-epäkonsistentti, ristiriita ja $\perp \notin s$.

- Atomilauseet Q mallin $\mathcal{M}$ määritelmän nojalla.
- Modaalilauseet muotoa $\neg Q$: $\mathcal{M}, s \Vdash \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \not\Vdash Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [Lemma 4 (ii)] $\neg Q \in s$.
- Modaalilauseet muotoa $Q \rightarrow P$ [kuten yllä].
- Modaalilauseet muotoa $\Box Q$:
  ($\Leftarrow$) Olkoon $\Box Q \in s$. Jos sRt, niin $s^{\#} \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \Vdash \Box Q$.
  ($\Rightarrow$) Olkoon $\Box Q \notin s$. Tällöin $\neg\Box Q \in s$ [Lemma 4 (ii)].
  Nyt $t_0 = s^{\#} \cup \{\neg Q\}$ on Σ-konsistentti [Lemma 2] ja t_0:lla on maks. Σ-konsistentti laajennus t [Lemma 3 (Lindenbaum)].
  Nyt sRt, koska $s^{\#} \subseteq t$. Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [Lemma 4 (ii)].
  Siis $\mathcal{M}, t \not\Vdash Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box Q$.

■

Täydellisyystodistus (yhteenveto)

- Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [Lemma 4 (i)], premissijoukko Σ on pätevä kanonisessa mallissa $\mathcal{M}$ [Lemma 5].
- Koska $\{\neg P\}$ on Σ-konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti Σ-konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$.
  Siis $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$ [Lemma 5].
- Koska Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$, niin $\Sigma \not\models_{\mathbf{K}} P$.

$\Longrightarrow$ Edellä annettu modaalilogiikan $\mathbf{K}$ Hilbert-tyylinen todistusjärjestelmä on täydellinen.

4. Yleistys lokaaleille premisseille

Määritelmä. $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen P päättyvä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta *globaalista osasta* ja sitä seuraavasta *lokaalista osasta*.

Globaalissa osassa jokainen lause

- on $\mathbf{K}$:n aksioma, kuuluu lausejoukkoon Σ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens tai N-säännöllä.

Lokaalissa osassa jokainen lause

- on $\mathbf{K}$:n aksioma, kuuluu lausejoukkoon Υ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista Modus Ponens -säännöllä.

Esimerkki

Osoitetaan $\{P,\ P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \Longrightarrow R$:

1.	P	(GP)
2.	$P \rightarrow Q$	(GP)
3.	Q	(MP, 1, 2)
4.	$\Box Q$	(N, 3)
5.	$\Box Q \rightarrow R$	(LP)
6.	R	(MP, 4, 5)

Huom! N-sääntöä ei voi käyttää lokaalissa osassa.

Esim. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \Longrightarrow \Box R$ ei päde.

Johtojen ominaisuuksia

- Johdot ovat äärellisiä.

  $\Longrightarrow$ *Kompaktius* ($\vdash$):

  Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- MP- ja N-sääntö ovat monotonisia:

  $\Longrightarrow$ *Monotonisuus* ($\vdash$):

  Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$, niin $\Sigma_2 \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$

- *Lokaali deduktioteoreema* on voimassa ($\vdash$):

  $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.

Täydellisyys

Teoreema. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. Oletetaan $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\models$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$):

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots \to (\phi_n \to P) \cdots)$.

- Täydellisyysteoreema:

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \cdots \to (\phi_n \to P) \cdots)$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$): $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\vdash$): $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

■

Virheettömyys

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Todistus. Oletetaan $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

- Kompaktius ($\vdash$):

  On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon' = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\vdash$):

  $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \to \cdots \to (\phi_n \to P) \cdots)$.

- Virheettömyysteoreema:

  $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow \phi_1 \to (\phi_2 \cdots \to (\phi_n \to P) \cdots)$.

- Lokaali deduktioteoreema ($\models$): $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \Upsilon' \Longrightarrow P$.

- Monotonisuus ($\models$): $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

■

5. Esimerkkejä

- Modaalilogiikan $\mathbf{K}$ todistusteorian ja edellä käsiteltyjen kehysten ominaisuuksia karakterisoivien lauseiden avulla voidaan muodostaa suoraviivaisesti Hilbert-tyyppinen todistusjärjestelmä myös muille kehyslogiikoille.

- Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä modaalilogiikkaa $\mathbf{T}$, jonka kehykset ovat refleksiivisiä.

- Modaalilogiikan $\mathbf{T}$ karakteristinen lause: T: $\Box P \to P$.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \models_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

$\Longrightarrow$ ($\mathbf{K}$:n virheettömyys- ja täydellisyysteoreema)

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{T}$

Näin saadaan siis Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{T}$:

Klassiset aksiomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö

N-sääntö

$\Longrightarrow$

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{T}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{S5}$

Vastaavasti kehyslogiikalle $\mathbf{S5}$ (ekvivalenttisten kehysten joukko):

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![\mathrm{B}]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{T}]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{S5}$:

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

T: $\Box P \to P$

$4: \Box P \to \Box\Box P$

$5: \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Modaalilogiikka $\mathbf{KD45}$

$\mathbf{KD45}$ on sarjallisien, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \cup [\![\mathrm{D}]\!] \cup [\![4]\!] \cup [\![5]\!] \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle $\mathbf{KD45}$:

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

K: $\Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$

$\mathrm{D}: \Box P \to \Diamond P$

$4: \Box P \to \Box\Box P$

$5: \neg\Box P \to \Box\neg\Box P$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Longrightarrow P$.