

## JOHDANTOA MODAALILOGIIKKAAN

1. Modaalilogiikka
2. Esimerkki tietämyslogiikasta: mutaiset lapset
3. Semanttinen tarkastelu
4. Todistusteoreettinen tarkastelu

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvun 1 alku (s. 368 – 371).

## 2. Esimerkki tietämyslogiikasta: mutaiset lapset

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset  $a$  ja  $b$ .

$A$ :  $a$ :lla mutainen otsa /  $B$ :  $b$ :lla mutainen otsa

$K_a B$ :  $a$  tietää, että  $b$ :lla on mutainen otsa.

## 1. Modaalilogiikka

- on käsitteiden *välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen, ...* logiikkaa.
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?  
Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?  
Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?  
Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.

Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$

$K_a(A \vee B)$

$K_b(A \vee B)$

$$K_a K_b(A \vee B) \quad (1)$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_b A \vee K_b \neg A) \quad (2)$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a \neg K_b B \quad (3)$$

Lauseista 1–3 seuraa  $K_a A$ .

Millä perusteella?

### 3. Semanttinen tarkastelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Lähtökohdaksi otetaan joukko *mahdollisia maailmoja* (lauselogiikan malleja).
- Agenti  $a$  tietää lauseen  $P$  (merkitään  $K_a P$ ) joss  $P$  on tosi kaikissa agentin  $a$  mahdollisina pitämässä maailmoissa.

**Esimerkki.** Olkoon agentin  $a$  mahdollisten maailmojen joukko  $\{\{P, Q\}, \{Q\}\}$ . Tällöin  $K_a Q$  on tosi, mutta  $K_a P$  ei ole.

- Kussakin mahdollisessa maailmassa  $s$  agentilla  $a$  on joukko agentin  $a$  kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.

☞ Mahdollisten maailmojen luokka jakaantuu agentin  $a$  kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja.

### Mallien analyysi (jatkuu)

Lause (1)  $K_a K_b (A \vee B)$  tosi  $s$ :ssä.

⇒  $K_b (A \vee B)$  tosi kaikissa  $S$ :n maailmoissa.

⇒ Kaikille  $i = 1, 2, \dots$  pätee

$A \vee B$  on tosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa.

⇒ Kaikille  $i = 1, 2, \dots$  pätee

joko  $A$  on tosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa tai

$B$  on tosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa.

### Mallien analyysi

Osoitetaan, että  $K_a A$  *seuraa loogisesti* lauseista 1–3, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on  $K_a A$  totta.

- Olkoon  $S$  jokin agentin  $a$  kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja  $s$  eräs joukon  $S$  mahdollisista maailmoista.
- Tarkastellaan niitä agentin  $b$  kannalta mahdollisten maailmojen joukkoja  $T_1, T_2, \dots$ , jotka leikkaavat joukkoa  $S$ .

Lause (2)  $K_a (K_b A \vee K_b \neg A)$  tosi  $s$ :ssä.

⇒  $(K_b A \vee K_b \neg A)$  tosi kaikissa  $S$ :n maailmoissa.

⇒ Kaikille  $i = 1, 2, \dots$  pätee

joko  $A$  on tosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa tai

$A$  on epätosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa.

### Mallien analyysi (jatkuu)

Lause (3)  $K_a \neg K_b B$  tosi  $s$ :ssä.

⇒ Siis  $\neg K_b B$  tosi kaikissa  $S$ :n maailmoissa.

⇒ Kaikille  $i = 1, 2, \dots$  pätee

$B$  on epätosi jossain  $T_i$ :n maailmassa.

⇒ Kaikille  $i = 1, 2, \dots$  pätee

$A$  on tosi kaikissa  $T_i$ :n maailmoissa.

⇒  $A$  on tosi kaikissa  $S$ :n maailmoissa.

⇒  $K_a A$  tosi  $s$ :ssä.

#### 4. Todistusteoreettinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita ja lainalaisuuksia (aksiomia ja päättelysääntöjä) tarvitaan?

- **Propositionaalinen päättely:** tautologiat + MP:

$$\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

- **Distributiivisuusaksioma:**

$$K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_aP \rightarrow K_aQ)$$

- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_aP}$$

#### Lauseen $K_aA$ johto

- |  |            |   |              |
|--|------------|---|--------------|
| 1. $K_aK_b(\neg A \rightarrow B)$                | [P1]       | 9. $K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$              | [MP, 6, 8]   |
| 2. $K_a(\neg K_b\neg A \rightarrow K_bA)$        | [P2]       | 10. $K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A) \rightarrow$ |              |
| 3. $K_a\neg K_bB$                                | [P3]       | $(K_a\neg K_bB \rightarrow K_a\neg K_b\neg A)$              | [Distr]      |
| 4. $K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$       |            | 11. $K_a\neg K_bB \rightarrow K_a\neg K_b\neg A$            | [MP, 9, 10]  |
| $(K_b\neg A \rightarrow K_bB)$                   | [Distr]    | 12. $K_a\neg K_b\neg A$                                     | [MP, 3, 11]  |
| 5. $K_aK_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow$    |            | 13. $K_a(\neg K_b\neg A \rightarrow K_bA) \rightarrow$      |              |
| $K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB)$                | [R, 4]     | $(K_a\neg K_b\neg A \rightarrow K_aK_bA)$                   | [Distr]      |
| 6. $K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB)$             | [MP, 1, 5] | 14. $K_a\neg K_b\neg A \rightarrow K_aK_bA$                 | [MP, 2, 13]  |
| 7. $(K_b\neg A \rightarrow K_bB) \rightarrow$    |            | 15. $K_aK_bA$   | [MP, 12, 14] |
| $(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$         | [Taut]     | 16. $K_bA \rightarrow A$                                    | [T]          |
| 8. $K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB) \rightarrow$ |            | 17. $K_aK_bA \rightarrow K_aA$                              | [R, 16]      |
| $K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$      | [R, 7]     | 18. $K_aA$  | [MP, 15, 17] |

- **R-sääntö:**

$$\frac{P \rightarrow Q}{K_aP \rightarrow K_aQ}$$

Huom! Kysymyksessä on johdettu sääntö:

1.  $P \rightarrow Q$
2.  $K_a(P \rightarrow Q)$  [N, 1]
3.  $K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_aP \rightarrow K_aQ)$  [Distr]
4.  $(K_aP \rightarrow K_aQ)$  [MP, 2,3]

- **T-aksioma:**

$$K_aP \rightarrow P$$

- Johdetaan lause  $K_aA$  lauseista 1–3 lähtien käyttämällä edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita.

#### Yhteenveto

1. Modaalilogiikka on käsitteiden (välttämätön, tietäminen, uskominen, tuleva, ...) logiikkaa
2. Mahdollisten maailmojen semantiikka on (erityisesti tietotekniikassa) käytetyin matemaattinen malli tällaisten käsitteiden formalisointiin, käsittelyyn ja niihin liittyvän päättelyn automatisointiin.
3. Kurssilla esitetään tähän semantiikkaan perustuva systemaattinen lähestymistapa modaalilogiikkaan ja sen sovellutuksiin.