T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. a)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Diamond(P \vee \Diamond\Box\Box P) \rightarrow \Diamond P\big)$		
2.	$\langle 1\rangle\Diamond(P \vee \Diamond\Box\Box P)$	(1)	
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond P$	(1)	
4.	$\langle 1,2\rangle P \vee \Diamond\Box\Box P$	(2)	
5.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(3)	
6.	$\langle 1,2\rangle P$ (4) $\otimes$		
7.	$\langle 1,2\rangle\Diamond\Box\Box P$	(4)	
8.	$\langle 1,2,3\rangle\Box\Box P$	(7)	
9.	$\langle 1,2,3\rangle\Box P$	(8)	(refleksiivisyys)
10.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(9)	(refleksiivisyys)
11.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(3)	(transitiivisuus)
	$\otimes$		

b)

1.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\big(\Diamond P \rightarrow \Box(\Diamond P \vee P)\big)$		
2.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Diamond P \rightarrow \Box(\Diamond P \vee P)\big)$	(1)	(refleksiivisyys)
3.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(2)	
4.	$\langle 1\rangle\neg\Box(\Diamond P \vee P)$	(2)	
5.	$\langle 1,2\rangle\neg(\Diamond P \vee P)$	(4)	
6.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$	(5)	
7.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(5)	
8.	$\langle 1,2\rangle\neg\big(\Diamond P \rightarrow \Box(\Diamond P \vee P)\big)$	(1)	
9.	$\langle 1,2\rangle\Diamond P$	(8)	
10.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box(\Diamond P \vee P)$	(8)	
11.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(9)	
12.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(6)	
	$\otimes$		

c)

1. $\langle 1\rangle\neg\Box\big(\Box(\Box P\wedge Q)\rightarrow\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)\big)$
2. $\langle 1,2\rangle\neg\big(\Box(\Box P\wedge Q)\rightarrow\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)\big)$ (1)
3. $\langle 1,2\rangle\Box(\Box P\wedge Q)$ (2)
4. $\langle 1,2\rangle\neg\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)$ (2)
5. $\langle 1\rangle\Box P\wedge Q$ (3) (symmetrisyys)
6. $\langle 1\rangle\Box P$ (5)
7. $\langle 1\rangle Q$ (5)
8. $\langle 1\rangle\neg\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)$ (4) (symmetrisyys)
9. $\langle 1,3\rangle\neg\Diamond\Diamond(P\vee Q)$ (8)
10. $\langle 1\rangle\neg\Diamond(P\vee Q)$ (9) (symmetrisyys)
11. $\langle 1,3\rangle\neg(P\vee Q)$ (10)
12. $\langle 1,3\rangle\neg P$ (11)
13. $\langle 1,3\rangle\neg Q$ (11)
14. $\langle 1,3\rangle P$ (6)

    $\otimes$

d)

1. $\langle 1\rangle\neg\Big(\Box P\rightarrow\Diamond\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)\Big)$
2. $\langle 1\rangle\Box P$ (1)
3. $\langle 1\rangle\neg\Diamond\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$ (1)
4. $\langle 1,2\rangle P$ (2) (sarjallisuus)
5. $\langle 1,2\rangle\neg\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$ (3)
6. $\langle 1,2\rangle P\rightarrow\Box Q$ (5)
7. $\langle 1,2\rangle\neg Q$ (5)
8. $\langle 1,2\rangle\neg P$ (6)

   $\otimes$

   9. $\langle 1,2\rangle\Box Q$ (6)
   10. $\langle 1,2,3\rangle Q$ (9) (sarjallisuus)
   11. $\langle 1,2,3\rangle\neg\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$ (3) (transitiivisuus)
   12. $\langle 1,2,3\rangle P\rightarrow\Box Q$ (11)
   13. $\langle 1,2,3\rangle\neg Q$ (11)

       $\otimes$

e)

1.	$1\ \neg\Diamond(\Box\Diamond\Box P \to \Box P)$	
2.	$1\ \neg(\Box\Diamond\Box P \to \Box P)$	(1)
3.	$1\ \Box\Diamond\Box P$	(2)
4.	$1\ \neg\Box P$	(2)
5.	$2\ \neg P$	(4)
6.	$2\ \Diamond\Box P$	(3)
7.	$3\ \Box P$	(6)
8.	$2\ P$	(7)
	$\otimes$	

2. Systemaattinen **K**-taulu:

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(3)
7.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(5)

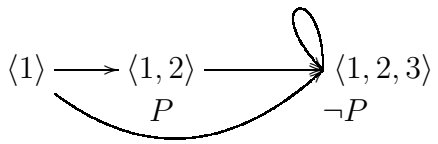
Ei **K**-pätevä. $\langle 1\rangle \longrightarrow \langle 1,2\rangle \longrightarrow \langle 1,2,3\rangle$, P, $\neg P$

Systemaattinen **K4**-taulu:

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(3)
7.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(5)
8.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\Box P$	(6) (transitiivisuus)
9.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(6)
10.	$\langle 1,2,3,4\rangle\neg P$	(8)
11.	$\langle 1,2,3,4\rangle\neg\Box P$	(9) (transitiivisuus)
12.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(9)
13.	$\langle 1,2,3,4,5\rangle\neg P$	(11)
14.	$\langle 1,2,3,4,5\rangle\neg\Box P$	(12) (transitiivisuus)
15.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(12)
	$\vdots$	

Systemaattiseen **K4**-tauluun muodostuu ääretön haara, joten taulua ei saada koskaan valmiiksi. Koska tämä ääretön haara ei ole suljettu, seuraa, että lause $\Diamond P \to \Diamond\Box P$ ei ole **K4**-pätevä.

Huomataan, että lauseet $\neg P$ ja $\neg\Box P$ toistuvat taulussa prefikseillä $\langle 1,2,3\rangle$, $\langle 1,2,3,4\rangle$ ja $\langle 1,2,3,4,5\rangle$. Siten näitä prefiksejä vastaavissa vastamallin maailmoissa pätevät täsmälleen samat lauseet. Äärellinen vastamalli voidaan nyt yrittää muodostaa samastamalla kaikki nämä maailmat yhdeksi maailmaksi ja tarkistamalla, onko näin saatu malli lauseen **K4**-pätevyyden vastamalli. Kun tämä tehdään ja huolehditaan siitä, että transitiivisuusehto pysyy voimassa, saadaan malli



Nähdään, että lause $\Diamond P$ toteutuu mallin maailmassa $\langle 1\rangle$, mutta lause $\Diamond\Box P$ ei toteudu tässä maailmassa. Siten malli on vastamalli tehtävän lauseen **K4**-pätevyydelle.

3.

1.	$\langle 1\rangle\neg\big((\Diamond P \to \Diamond\Diamond P) \wedge \neg P\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Diamond P)$	(1)	3.	$\langle 1\rangle\neg\neg P$	(1)
6.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(2)	4.	$\langle 1\rangle P$	(3)
7.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Diamond P$	(2)	5.	$\langle 1\rangle\neg P$	(LP)
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(6)		$\otimes$	
9.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$	(7)			
10.	$\langle 1,2\rangle\Box\neg P \to \neg P$	(GP)			
11.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box\neg P$	(10)	12.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(10)
13.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\neg P$	(11)		$\otimes$	
14.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(12)			
15.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(9)			
	$\otimes$				