

1. a)

- | | | |
|--|---|-----------|
| 1. $\langle 1 \rangle \neg (\diamond(P \vee \diamond \square \square P) \rightarrow \diamond P)$ | | |
| 2. $\langle 1 \rangle \diamond(P \vee \diamond \square \square P)$ | (1) | |
| 3. $\langle 1 \rangle \neg \diamond P$ | (1) | |
| 4. $\langle 1, 2 \rangle P \vee \diamond \square \square P$ | (2) | |
| 5. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ | (3) | |
| 6. $\langle 1, 2 \rangle P$ (4) | 7. $\langle 1, 2 \rangle \diamond \square \square P$ (4)
8. $\langle 1, 2, 3 \rangle \square \square P$ (7)
9. $\langle 1, 2, 3 \rangle \square P$ (8) (refleksiivisyys)
10. $\langle 1, 2, 3 \rangle P$ (9) (refleksiivisyys)
11. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (3) (transitiivisuus) | |
| \otimes | | |
| | | \otimes |

b)

1. $\langle 1 \rangle \neg \diamond (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$
 2. $\langle 1 \rangle \neg (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$ (1) (refleksiivisyys)
 3. $\langle 1 \rangle \diamond P$ (2)
 4. $\langle 1 \rangle \neg \square (\diamond P \vee P)$ (2)
 5. $\langle 1, 2 \rangle \neg (\diamond P \vee P)$ (4)
 6. $\langle 1, 2 \rangle \neg \diamond P$ (5)
 7. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (5)
 8. $\langle 1, 2 \rangle \neg (\diamond P \rightarrow \square (\diamond P \vee P))$ (1)
 9. $\langle 1, 2 \rangle \diamond P$ (8)
 10. $\langle 1, 2 \rangle \neg \square (\diamond P \vee P)$ (8)
 11. $\langle 1, 2, 3 \rangle P$ (9)
 12. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (6)
- \otimes

c)

1. $\langle 1 \rangle \neg \Box (\Box (\Box P \wedge Q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q))$
 2. $\langle 1, 2 \rangle \neg (\Box (\Box P \wedge Q) \rightarrow \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q))$ (1)
 3. $\langle 1, 2 \rangle \Box (\Box P \wedge Q)$ (2)
 4. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Diamond \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q)$ (2)
 5. $\langle 1 \rangle \Box P \wedge Q$ (3) (symmetrisyys)
 6. $\langle 1 \rangle \Box P$ (5)
 7. $\langle 1 \rangle Q$ (5)
 8. $\langle 1 \rangle \neg \Box \Diamond \Diamond (P \vee Q)$ (4) (symmetrisyys)
 9. $\langle 1, 3 \rangle \neg \Diamond \Diamond (P \vee Q)$ (8)
 10. $\langle 1 \rangle \neg \Diamond (P \vee Q)$ (9) (symmetrisyys)
 11. $\langle 1, 3 \rangle \neg (P \vee Q)$ (10)
 12. $\langle 1, 3 \rangle \neg P$ (11)
 13. $\langle 1, 3 \rangle \neg Q$ (11)
 14. $\langle 1, 3 \rangle P$ (6)
- ⊗

d)

1. $\langle 1 \rangle \neg (\Box P \rightarrow \Diamond ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q))$
 2. $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
 3. $\langle 1 \rangle \neg \Diamond ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$ (1)
 4. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2) (sarjallisuus)
 5. $\langle 1, 2 \rangle \neg ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$ (3)
 6. $\langle 1, 2 \rangle P \rightarrow \Box Q$ (5)
 7. $\langle 1, 2 \rangle \neg Q$ (5)
 8. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (6) | 9. $\langle 1, 2 \rangle \Box Q$ (6)
 - ⊗ | 10. $\langle 1, 2, 3 \rangle Q$ (9) (sarjallisuus)
 - | 11. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg ((P \rightarrow \Box Q) \rightarrow Q)$ (3) (transitiivisuus)
 - | 12. $\langle 1, 2, 3 \rangle P \rightarrow \Box Q$ (11)
 - | 13. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg Q$ (11)
- ⊗

e)

1. $1 \neg \diamond(\Box \diamond \Box P \rightarrow \Box P)$
 2. $1 \neg(\Box \diamond \Box P \rightarrow \Box P)$ (1)
 3. $1 \Box \diamond \Box P$ (2)
 4. $1 \neg \Box P$ (2)
 5. $2 \neg P$ (4)
 6. $2 \diamond \Box P$ (3)
 7. $3 \Box P$ (6)
 8. $2 P$ (7)
- ⊗

2. Systemaattinen **K**-taulu:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\diamond P \rightarrow \diamond \Box P)$
2. $\langle 1 \rangle \diamond P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (1)
4. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2)
5. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Box P$ (3)
6. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (3)
7. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (5)

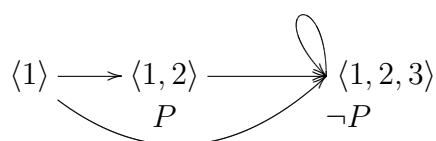
Ei **K**-pätevä. $\langle 1 \rangle \longrightarrow \langle 1, 2 \rangle \longrightarrow \langle 1, 2, 3 \rangle$
 $\qquad\qquad\qquad P \qquad\qquad\qquad \neg P$

Systemaattinen **K4**-taulu:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\diamond P \rightarrow \diamond \Box P)$
 2. $\langle 1 \rangle \diamond P$ (1)
 3. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (1)
 4. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2)
 5. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Box P$ (3)
 6. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (3)
 7. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (5)
 8. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg \Box P$ (6) (transitiivisuus)
 9. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (6)
 10. $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle \neg P$ (8)
 11. $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle \neg \Box P$ (9) (transitiivisuus)
 12. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (9)
 13. $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle \neg P$ (11)
 14. $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle \neg \Box P$ (12) (transitiivisuus)
 15. $\langle 1 \rangle \neg \diamond \Box P$ (12)
- ⋮

Systemaattiseen **K4**-tauluun muodostuu ääretön haara, joten taulua ei saada koskaan valmiiksi. Koska tämä ääretön haara ei ole suljettu, seuraa, että lause $\Diamond P \rightarrow \Diamond \Box P$ ei ole **K4**-pätevä.

Huomataan, että lauseet $\neg P$ ja $\neg \Box P$ toistuvat taulussa prefikseillä $\langle 1, 2, 3 \rangle$, $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ ja $\langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$. Siten näitä prefiksejä vastaavissa vastamallin maailmoissa pätevät täsmälleen samat lauseet. Äärellinen vastamalli voidaan nyt yrittää muodostaa samastamalla kaikki nämä maailmat yhdeksi maailmaksi ja tarkistamalla, onko näin saatu malli lauseen **K4**-pätevyyden vastamalli. Kun tämä tehdään ja huolehditaan siitä, että transitiivisuusehto pysyy voimassa, saadaan malli



Nähdään, että lause $\Diamond P$ toteutuu mallin maailmassa $\langle 1 \rangle$, mutta lause $\Diamond \Box P$ ei toteudu tässä maailmassa. Siten malli on vastamalli tehtävän lauseen **K4**-pätevyydelle.

3.

1.	$\langle 1 \rangle \neg ((\Diamond P \rightarrow \Diamond \Diamond P) \wedge \neg P)$		
2.	$\langle 1 \rangle \neg (\Diamond P \rightarrow \Diamond \Diamond P)$	(1)	3. $\langle 1 \rangle \neg \neg P$ (1)
6.	$\langle 1 \rangle \Diamond P$	(2)	4. $\langle 1 \rangle P$ (3)
7.	$\langle 1 \rangle \neg \Diamond \Diamond P$	(2)	5. $\langle 1 \rangle \neg P$ (LP)
8.	$\langle 1, 2 \rangle P$	(6)	\otimes
9.	$\langle 1, 2 \rangle \neg \Diamond P$	(7)	
10.	$\langle 1, 2 \rangle \Box \neg P \rightarrow \neg P$	(GP)	
11.	$\langle 1, 2 \rangle \neg \Box \neg P$	(10)	12. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (10)
13.	$\langle 1, 2, 3 \rangle \neg \neg P$	(11)	\otimes
14.	$\langle 1, 2, 3 \rangle P$	(12)	
15.	$\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$	(9)	
	\otimes		