T-79.5101 **kevät 2006**

Laskennallisen logiikan jatkokurssi

Laskuharjoitus 4

Ratkaisut

Aksiooma K:

$$\text{K:} \quad \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

Päättelysäännöt:

$$\text{MP:} \quad \frac{P, P \to Q}{Q}$$

$$\text{N:} \quad \frac{P}{\Box P}$$

1. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on sarjallinen, mutta lause $\Box P \to \Diamond P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Diamond P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että ei ole olemassa maailmaa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$. Lisäksi oletuksen nojalla kehys $\mathcal{F}$ on sarjallinen, joten on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$. Näin ollen $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$. Tästä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Lause $\Box P \to \Diamond P$ on siis pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

   b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on heikosti tiheä, mutta lause $\Box\Box P \to \Box P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P \to \Box P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$. Oletuksen nojalla kehys $\mathcal{F}$ on heikosti tiheä, joten on olemassa $u \in S$, jolle $\langle s, u \rangle \in R$ ja $\langle u, t \rangle \in R$. Koska $\langle u, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$, seuraa siitä, että $\mathcal{M}, u \nVdash \Box P$. Nyt $\langle s, u \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash \Box P$, joten täytyy olla niin, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P$. Tästä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$. Lause $\Box\Box P \to \Box P$ on siis pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

2. a)

1.	$P \to (Q \to P)$	[Tautologia]
2.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big)$	[N, 1]
3.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big) \to \big(\Box P \to \Box(Q \to P)\big)$	[K]
4.	$\Box P \to \Box(Q \to P)$	[MP, 2, 3]

b)

1.	$\Box(P \to Q)$	[GP]
2.	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$	[Tautologia]
3.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big)$	[N, 2]
4.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big) \to$ $\big(\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)\big)$	[K]
5.	$\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 3, 4]
6.	$\Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 1, 5]
7.	$\Box(\neg Q \to \neg P) \to (\Box\neg Q \to \Box\neg P)$	[K]
8.	$\Box\neg Q \to \Box\neg P$	[MP, 6, 7]

3. a)

1.	$P \to Q$	[GP]
2.	$\neg Q \to P$	[GP]
3.	$(P \to Q) \to \big((\neg Q \to P) \to Q\big)$	[Tautologia]
4.	$(\neg Q \to P) \to Q$	[MP, 1, 3]
5.	Q	[MP, 2, 4]
6.	$\Box Q$	[N, 5]
7.	$\neg Q \lor S$	[LP]
8.	$(\neg Q \lor S) \to (Q \to S)$	[Tautologia]
9.	$Q \to S$	[MP, 7, 8]
10.	S	[MP, 5, 9]
11.	$\Box Q \to (S \to \Box Q \land S)$	[Tautologia]
12.	$S \to \Box Q \land S$	[MP, 6, 11]
13.	$\Box Q \land S$	[MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \to \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \to \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \to \neg P) \to (\Box Q \to \Box\neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \to \Box\neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \to \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \to \Box Q) \to$ $\big((\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)\big)$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \to \Box\neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to (\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q$	[MP, 8, 9]
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box\neg Q$	[MP, 10, 11]