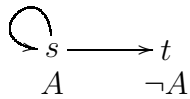
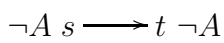
T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 2
Ratkaisut

1. a) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = \text{true}$, $v(t, A) = \text{false}$.



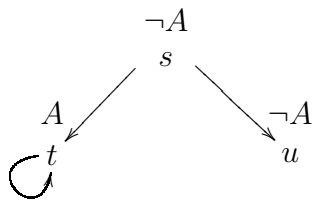
$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ ei kuitenkaan päde, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond A \rightarrow \Box A$.

b) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, A) = \text{false}$.



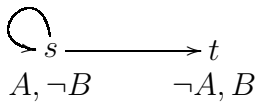
Koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash A$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box A$ pätee. Koska maailmalla t ei ole seuraajia relaatiossa R, $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Tällöin $\mathcal{M}, t \nVdash \neg\Box A$, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\neg\Box A$ (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Siis $\mathcal{M}, s \nVdash \neg\Box A \rightarrow \Box\neg\Box A$.

c) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t, u\}$, $R = \{\langle s, t\rangle, \langle s, u\rangle, \langle t, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(u, A) = \text{false}$ ja $v(t, A) = \text{true}$.



$\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A$, koska $\langle t, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash A$. Koska t on itsensä ainoa seuraaja R-relaatiossa, myös $\mathcal{M}, t \Vdash \Box A$ pätee. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond A \wedge \Box A$ pätee, mistä seuraa, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A)$ pätee (koska $\langle s, t\rangle \in R$). Koska u:lla ei ole R-relaatiossa seuraajia, $\mathcal{M}, u \nVdash \Diamond A$. Koska $\langle s, u\rangle \in R$, seuraa tästä, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond(\Diamond A \wedge \Box A) \rightarrow \Box\Diamond A$.

d) $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle\}$, $v(s, A) = v(t, B) = \text{true}$, $v(s, B) = v(t, A) = \text{false}$.



$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$ pätee, koska $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, s \Vdash A$ pätee. Myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond B$ on voimassa, koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash B$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A \wedge \Diamond B$. $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond(A \wedge B)$ ei kuitenkaan päde, sillä s:llä ei ole olemassa sellaista seuraajaa s' R-relaatiossa, jolle pätisi $\mathcal{M}, s' \Vdash A \wedge B$. Siis $\mathcal{M}, s \nVdash (\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$.

2. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$.

   ($\Rightarrow$) Oletetaan, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$ mikä tahansa mallin maailma. Oletuksen perusteella $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee, mistä seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \top$. Edelleen päätellään, että

   $$\text{jos} \quad \mathcal{M}, s \Vdash \Box A, \quad \text{niin silloin välttämättä myös} \quad \mathcal{M}, t \Vdash A,$$

   s:n seuraajalle t, ja siksi

   $$\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A.$$

   Siis jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$, niin silloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$. Siten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A \rightarrow \Diamond A$, eli myös $\Box A \rightarrow \Diamond A$ on pätevä mallissa.

   ($\Leftarrow$) Oletetaan, että $\Box A \rightarrow \Diamond A$ on pätevä mallissa. Olkoon $s \in S$. Osoitetaan, että nyt on välttämättä olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Jos näin ei olisi, s:llä ei olisi R-relaatiossa yhtään seuraajaa, jolloin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box A$ olisi voimassa. Koska $\Box A \rightarrow \Diamond A$ on oletuksen mukaan pätevä mallissa, olisi nyt välttämättä oltava myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond A$, mistä seuraa ristiriita.

   On siis olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Siten $\mathcal{M}, t \Vdash \top$, jolloin myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\top$ pätee. Seuraa, että $\Diamond\top$ on pätevä mallissa.

3. Käytetään tehtävässä hyväksi generoiduille alimalleille[1] voimassa olevaa tulosta:

[1] Olkoon annettu malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$. Joukon $S_0 \subseteq S$ *generoima alimalli* $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$ on malli, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

1. S' on pienin S:n osajoukko, joka toteuttaa ehdot
   - $S_0 \subseteq S'$.
   - S' on R-suljettu: jos on olemassa maailmat $s \in S'$ ja $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$, niin silloin on oltava myös $t \in S'$.
2. $R' = (S' \times S') \cap R$.
3. Kaikille atomilauseille P ja kaikille maailmoille $s \in S'$: $v'(s, P) = v(s, P)$.

Jos $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$ on mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmojen joukon $S_0 \subseteq S$ generoima alimalli, niin silloin kaikille lauseille P ja kaikille maailmoille $s \in S'$ pätee

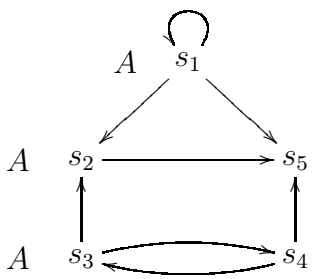
$$\mathcal{M}, s \Vdash P \quad \text{joss} \quad \mathcal{M}', s \Vdash P.$$

Koska tehtävässä annettu lause

$$\Box\big((\Box\Box A \to \Diamond\Box A) \wedge \Diamond\Box(\Box A \to \Diamond A)\big) \to \big(\Diamond(\Diamond A \to \Box A) \to ((\Diamond A \wedge \Box\Diamond A) \vee \Diamond\Box\Box\neg A)\big)$$

on tosi tehtävässä annetun mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s_4, se on tosi myös missä tahansa $\mathcal{M}$:stä generoidussa alimallissa, joka sisältää maailman s_4.

Tehtävän malli $\mathcal{M}$:

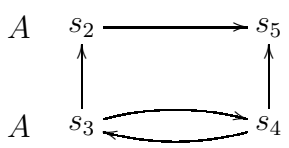


Muodostetaan maailmojen joukon $S_0 = \{s_4\}$ generoima alimalli $\mathcal{M}' = \langle S', R', v' \rangle$.

Koska $S_0 \subseteq S'$, niin $s_4 \in S'$. Koska nyt $s_3 \in S$, $s_5 \in S$ ja $\langle s_4, s_3 \rangle \in R$, $\langle s_4, s_5 \rangle \in R$, on oltava $s_3 \in S'$ ja $s_5 \in S'$, jotta S' olisi R-suljettu. Edelleen, koska $s_2 \in S$ ja $\langle s_3, s_2 \rangle \in R$, on myös oltava $s_2 \in S'$. Koska maailma s_1 ei ole saavutettavissa maailmoista s_2, s_3, s_4 tai s_5 R-relaation kaarten välityksellä, maailmojen joukko $\{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ on R-suljettu. Selvästi tämä joukko on myös pienin S:n R-suljettu osajoukko, joka sisältää maailman s_3. Generoidun alimallin ehtojen täyttämiseksi voidaan siis määritellä

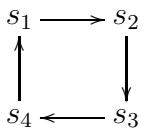
$$S' = \{s_2, s_3, s_4, s_5\},$$
$$R' = \{\langle s_2, s_5 \rangle, \langle s_3, s_2 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_3 \rangle, \langle s_4, s_5 \rangle\}$$

ja $v'(s_2, A) = v'(s_3, A) = \text{true}$, $v'(s_4, A) = v'(s_5, A) = \text{false}$, jolloin malli $\mathcal{M}'$ on



Koska tehtävän lause toteutuu mallin $\mathcal{M}$ maailmassa s_4, se toteutuu myös mallin $\mathcal{M}'$ maailmassa s_4, koska $\mathcal{M}'$ on generoitu alimalli. Koska $\mathcal{M}'$ sisältää neljä mahdollista maailmaa, se on eräs tehtävän ratkaisu.

4. $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$:



$\mathcal{F}' = \langle S', R'\rangle$, missä $S' = \{r_1, r_2\}$ ja $R' = \{\langle r_1, r_2\rangle,\ \langle r_2, r_1\rangle\}$:

Muodostetaan kuvaus $f : S \to S'$:

$$f(s_1) = f(s_3) = r_1$$
$$f(s_2) = f(s_4) = r_2$$

Kuvaus f on p-morfismi, koska

1. f on surjektiivinen (esim. $r_1 = f(s_1)$ ja $r_2 = f(s_2)$)
2. $\forall s, t \in S$: jos sRt pätee, niin $f(s)R'f(t)$ pätee
   (Esimerkiksi paria $\langle s_1, s_2\rangle \in R$ vastaa pari $\langle f(s_1), f(s_2)\rangle = \langle r_1, r_2\rangle$, joka kuuluu relaatioon R'; loput relaation R parit voidaan tarkistaa vastaavasti.)
3. $\forall s \in S\ \forall t \in S'$: jos $f(s)R't$ pätee, niin on olemassa $u \in S$ siten, että sRu ja $f(u) = t$ pätee
   (Esimerkiksi $\langle r_2, r_1\rangle = \langle f(s_4), r_1\rangle \in R'$, ja havaitaan, että $s_1 \in S$, s_4Rs_1 ja $f(s_1) = r_1$; loput tapaukset vastaavasti.)

P-morfismeja koskevan proposition perusteella seuraa, että

$$\text{jos } \mathcal{F} \models P, \quad \text{niin} \quad \mathcal{F}' \models P$$

kaikille lauseille P.