**T-79.5101** **kevät 2006**
**Laskennallisen logiikan jatkokurssi**
**Laskuharjoitus 12**
**Ratkaisut**

1. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\Big(\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \rightarrow \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\Big).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$$
$$\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \Big\{\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned}
C_0 = \Big\{&\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_1 = \Big\{&\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}\\
C_2 = \Big\{&\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_3 = \Big\{&\big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}
\end{aligned}$$

Solmut $C_0$, $C_1$ ja $C_2$ voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen $C_0$, $C_1$ tai $C_2$ OR-seuraajat, näiden AND-seuraajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu $C_3$ sisältää lauseet $\mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)$ ja $\mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)$, solmulle $C_3$ saadaan OR-seuraaja $D_1 = \{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\}$.

$D_1$:n AND-seuraajat:

$$
\begin{aligned}
C_4 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\} \\
C_5 &= D_1 \cup \{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\} \\
C_6 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\} \\
C_7 &= D_1 \cup \{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\}
\end{aligned}
$$

Koska solmut $C_4$, $C_5$ ja $C_6$ ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu $C_7$, jolle saadaan OR-seuraaja $\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\} = D_1$.

AND-solmu $C_7$ karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta $C_7$ lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen $Q$, ja lause $P$ olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun $C_7$ poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut $D_1$, $C_3$ ja $D_0$. Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

2. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$$
$$\neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P$$
$$\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

$D_0$:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\big\}\\
C_1 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\big\}\\
C_2 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P,\\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\big\}\\
C_3 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P,\\
&\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\big\}
\end{aligned}$$

$C_0$:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$
$C_1$:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$
$C_2$:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$
$C_3$:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

$D_1$:n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

$D_2$:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_5 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}\\
C_6 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\}
\end{aligned}$$

$D_3$:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_7 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\}\\
C_8 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\}
\end{aligned}$$

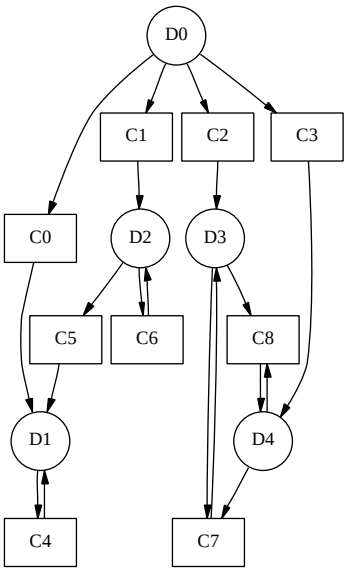
$D_4$:n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$
$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

$C_4$:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
$C_5$:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
$C_6$:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$
$C_7$:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$
$C_8$:n OR-seuraaja: $D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

Alustava taulu $T_0$:




Koska solmu $C_4$ ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslausetta, solmu $C_4$ jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle $D_1$ jää tauluun seuraaja, joten solmua $D_1$ ei myöskään karsita. Kaikki solmun $C_0$ seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua $C_0$ ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että $T_0$:sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun $C_0$, joka sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$. Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen $C_0$ ja $C_4$ avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli

$$\begin{tikzcd} \underset{\neg P}{C_0} \arrow[r] & \underset{\neg P}{C_4} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

Koska CTL-lause $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$ on toteutuva.