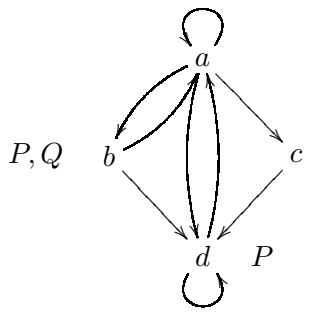
T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 11
Ratkaisut

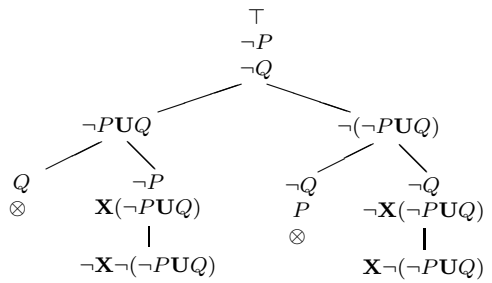
1. $\mathcal{M}$:



Lauseen $\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q)$ sulkeuma:

$$\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q)\big) = \big\{\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q), \neg\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q), \neg P \mathbf{U} Q, \mathbf{X}\neg(\neg P \mathbf{U} Q), \neg(\neg P \mathbf{U} Q), \neg P, Q, \neg\mathbf{X}\neg(\neg P \mathbf{U} Q), P, \neg Q\big\}$$

Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = v(a, Q) = \text{false}$, saadaan tilan a perusteella taulu



Taulun avoimista haaroista saadaan kelvolliset lausejoukot

$$K_1 = \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg P \mathbf{U} Q, \mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P \mathbf{U} Q)\big\}$$
$$K_2 = \big\{\top, \neg P, \neg Q, \neg(\neg P \mathbf{U} Q), \neg\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q), \mathbf{X}\neg(\neg P \mathbf{U} Q)\big\}$$

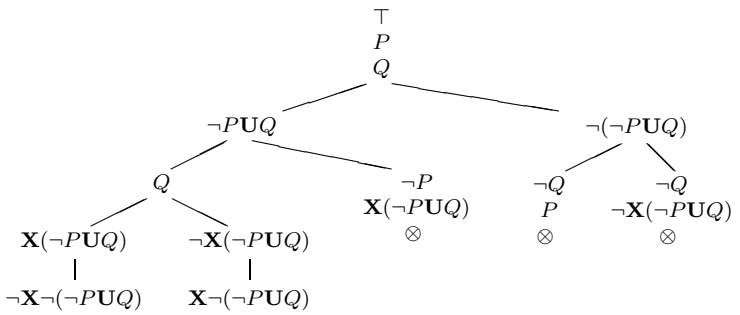
Tilasta a ja näistä lausejoukoista saadaan siten atomit (a, K_1) ja (a, K_2). (Lausejoukot K_1 ja K_2 ovat siis suurimmat mahdolliset $\mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q)\big)$:n ristiriidattomat[1] osajoukot, jotka ovat yhtäpitäviä

[1]Lausejoukko K on ristiriitainen, jos $\varphi, \neg\varphi \in K$ jollekin lauseelle φ.

atomilauseiden valuaation kanssa tilassa a: minkä tahansa lauseen $\varphi \in \mathrm{CL}\big(\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q)\big) \setminus K_i$ lisääminen joukkoon K_i, $i \in \{1,2\}$, tekisi lausejoukon ristiriitaiseksi.)

Koska atomilauseilla P ja Q on tilassa c sama valuaatio kuin tilassa a, tilan c perusteella saadaan atomit (c, K_1) ja (c, K_2).

Muodostetaan taulu tilan b atomilauseiden valuaation perusteella:

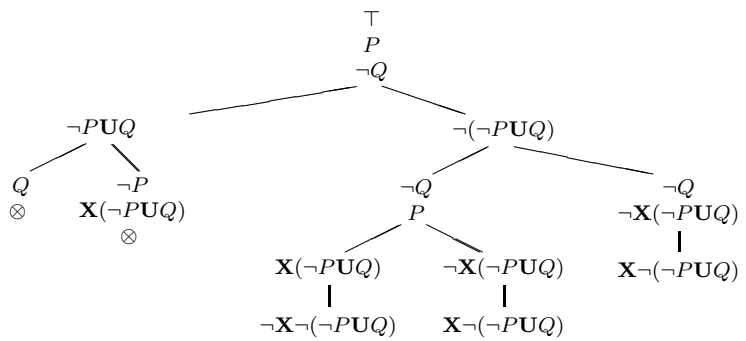


Taulun avoimista haaroista saadaan lausejoukot

$$K_3 = \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$
$$K_4 = \big\{\top, P, Q, \neg P\mathbf{U}Q, \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$

Tilan b perusteella saadaan siis atomit (b, K_3) ja (b, K_4).

Muodostetaan vielä taulu tilan d suhteen:



Nyt saadaan lausejoukot

$$K_5 = \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$
$$K_6 = \big\{\top, P, \neg Q, \neg(\neg P\mathbf{U}Q), \neg\mathbf{X}(\neg P\mathbf{U}Q), \mathbf{X}\neg(\neg P\mathbf{U}Q)\big\}$$

(lausejoukko K_6 saadaan kahdesta taulun avoimesta haarasta). Tilan d perusteella saadaan siis atomit (d, K_5) ja (d, K_6).

Muodostetaan graafi $G = (N, E)$, jonka solmujen joukko N koostuu kaikista edellä määritetyistä atomeista, ts.

$$N = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_1), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$$

ja jonka kaaret toteuttavat seuraavan ehdon: atomista (s, K) on kaari atomiin (s', K'), jos ja vain, jos

(a) $\langle s, s' \rangle \in R$ (mallissa $\mathcal{M}$) ja

(b) kaikille K:n muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleville lauseille pätee $\varphi \in K'$.

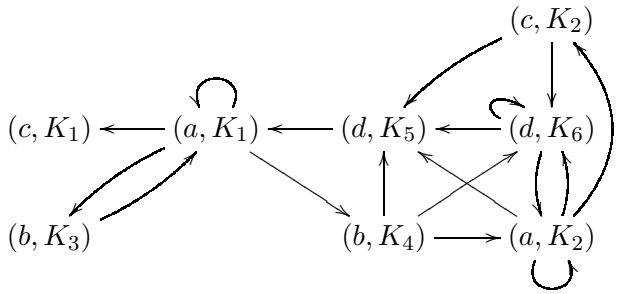
Jälkimmäisen ehdon tarkistamiseksi voidaan ensin muodostaa K_i-joukkojen välille "yhteensopivuusrelaatio", joka voidaan esittää taulukkona seuraavasti:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
K_1	×		×	×		
K_2		×			×	×
K_3	×		×	×		
K_4		×			×	×
K_5	×		×	×		
K_6		×			×	×

Taulukon i:nnen rivin j:nnessä sarakkeessa on rasti, jos ja vain, jos kaikille lauseille $\mathbf{X}\varphi \in K_i$ pätee $\varphi \in K_j$: esimerkiksi pari (K_1, K_3) toteuttaa ehdon, koska $\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q) \in K_1$ on K_1:n ainoa muotoa $\mathbf{X}\varphi$ oleva lause ja $\neg P \mathbf{U} Q \in K_3$.

Ehdot (a) ja (b) voidaan nyt tarkistaa relaation R ja yllä olevan taulukon avulla. Esimerkiksi atomista (b, K_3) voisi relaatiota R koskevan ehdon (a) perusteella olla kaari mihin tahansa atomeista $\big\{(a, K_1), (a, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$; koska K-joukkojen välinen ehto ei kuitenkaan yllä olevan taulukon perusteella päde pareille (K_3, K_2), (K_3, K_5) ja (K_3, K_6), jäljelle jää ainoastaan kaari $\big\langle (b, K_3), (a, K_1) \big\rangle$.

Graafiksi G saadaan

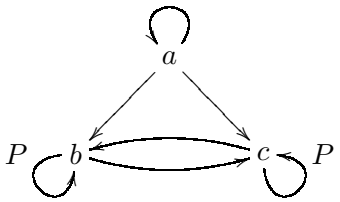


Lauseen $\mathbf{EX}(\neg P \mathbf{U} Q)$ toteutuvuuden määrittämiseksi tilassa a tutkitaan, onko graafissa G polkua, joka alkaa jostakin atomista (a, K) ($K \in \{K_1, \ldots, K_6\}$) siten, että lause $\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q)$ kuuluu joukkoon K, ja polku johtaa johonkin itsetoteutuvaan ei-triviaaliin vahvasti kytkettyyn komponenttiin. (Vahvasti kytketty komponentti $C \subseteq N$ on itsetoteutuva, jos kaikkien atomien $(s, K) \in C$ kaikille joukkoon K kuuluville muotoa $\varphi \mathbf{U} \psi$ oleville lauseille on olemassa atomi $(s', K') \in C$ siten, että $\psi \in K'$.)

Graafin G ainoa ei-triviaali vahvasti kytketty komponentti on $C = \big\{(a, K_1), (a, K_2), (b, K_3), (b, K_4), (c, K_2), (d, K_5), (d, K_6)\big\}$. Tämä komponentti on myös itsetoteutuva, sillä ainoa C:n solmuissa esiintyvä muotoa $\varphi \mathbf{U} \psi$ oleva lause on $\neg P \mathbf{U} Q$, ja C sisältää esim. atomin (b, K_3), jolle pätee $Q \in K_3$.

Nähdään, että komponentti C on saavutettavissa esimerkiksi atomista (a, K_1) (koska $(a, K_1) \in C$)). Koska $\mathbf{X}(\neg P \mathbf{U} Q) \in K_1$, seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{EX}(\neg P \mathbf{U} Q)$ pätee.

2. $\mathcal{M}$:



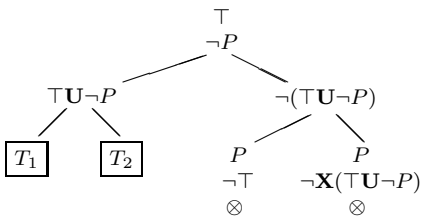
$\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \models \neg \mathbf{E} \neg \mathbf{FG} P$ pätee, jos ja vain, jos $\mathcal{M}, a \not\models \mathbf{E} \neg \mathbf{FG} P$. Tutkitaan siis, päteekö $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E} \neg \mathbf{FG} P$. Kirjoitetaan lause $\neg \mathbf{FG} P$ käyttämällä ainoastaan **X**- ja **U**-temporaalikonnektiiveja:

$$\begin{aligned} \neg \mathbf{FG} P &\equiv \neg \mathbf{F} \neg \mathbf{F} \neg P \\ &\equiv \neg \mathbf{F} \neg (\top \mathbf{U} \neg P) \\ &\equiv \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big) \end{aligned}$$

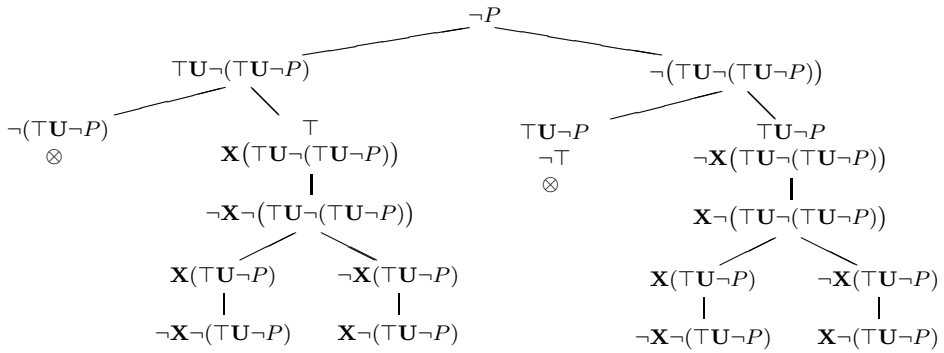
Lauseen $\neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big)$ sulkeuma:

$$\begin{aligned} \mathrm{CL}\big(\neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big)\big) = \big\{ & \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P), \\ & \top, \neg (\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg \top, \\ & \top \mathbf{U} \neg P, \neg \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg P, \\ & \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), P, \\ & \neg \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \neg \mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \\ & \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P), \neg \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P) \big\} \end{aligned}$$

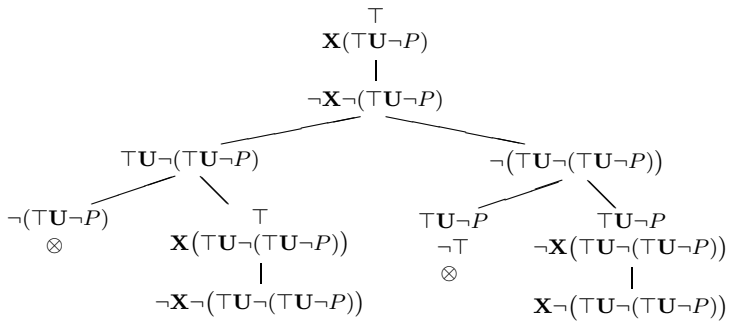
Muodostetaan atomit. Koska $v(a, P) = \text{false}$, saadaan tilan a perusteella taulu



jossa haara T_1 on



ja haara T_2 on



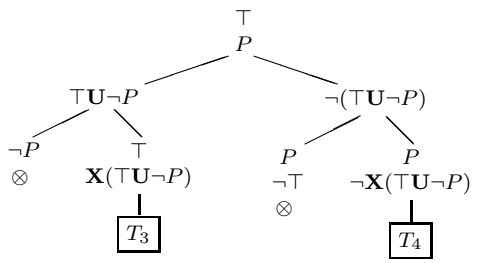
Taulun avoimien haarojen perusteella saadaan nyt lausejoukot

$$
\begin{aligned}
K_1 = \{&\top, \neg P, \top \mathbf{U} \neg P, \top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \\
&\neg \mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \neg \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\} \\
K_2 = \{&\top, \neg P, \top \mathbf{U} \neg P, \top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \\
&\neg \mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\} \\
K_3 = \{&\top, \neg P, \top \mathbf{U} \neg P, \neg\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \\
&\mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \neg \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\} \\
K_4 = \{&\top, \neg P, \top \mathbf{U} \neg P, \neg\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg \mathbf{X}\big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \\
&\mathbf{X} \neg \big(\top \mathbf{U} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\big), \neg \mathbf{X}(\top \mathbf{U} \neg P), \mathbf{X} \neg (\top \mathbf{U} \neg P)\}
\end{aligned}
$$

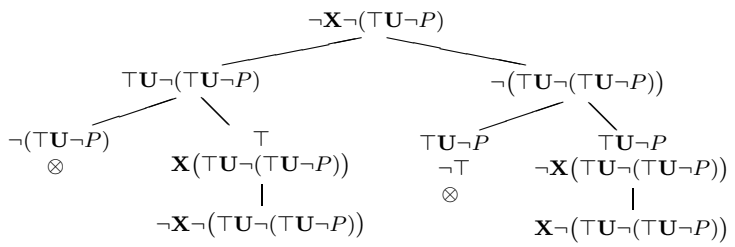
$$K_5 = \big\{\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),$$
$$\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}$$
$$K_6 = \big\{\top, \neg P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),$$
$$\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\big\}$$

Näin saadaan atomit (a, K_1), (a, K_2), (a, K_3), (a, K_4), (a, K_5) ja (a, K_6).

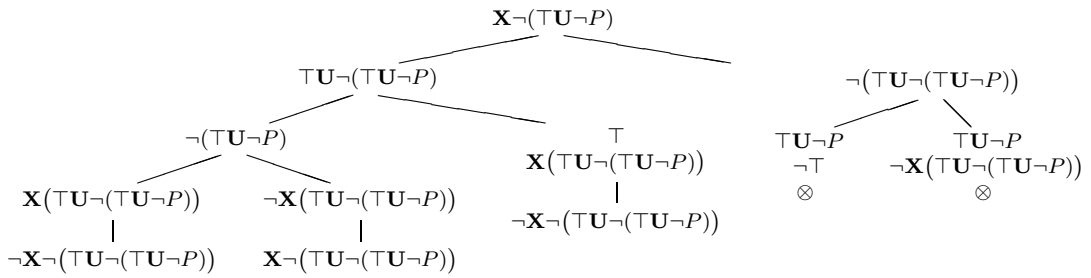
Koska $v(b, P) = v(c, P) =$ true, tilojen b:n ja c:n perusteella saadaan taulu



jossa haara T_3 on



ja haara T_4 on



Näin saadaan lausejoukot

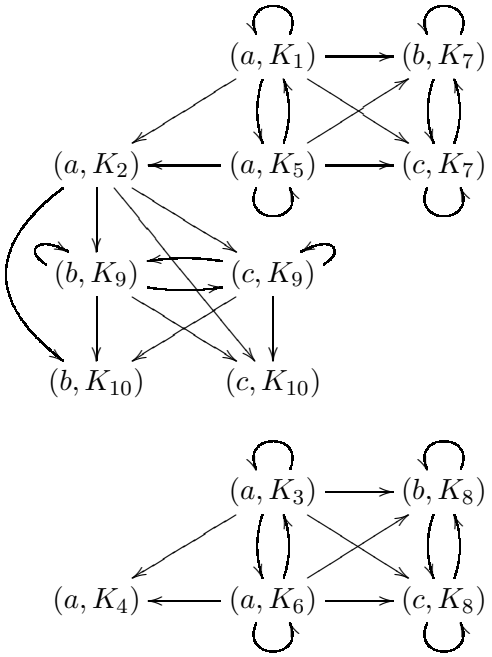
$$
\begin{aligned}
K_7 = \{&\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}\\
K_8 = \{&\top, P, \top\mathbf{U}\neg P, \mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}\\
K_9 = \{&\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \neg\mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}\\
K_{10} = \{&\top, P, \neg(\top\mathbf{U}\neg P), \neg\mathbf{X}(\top\mathbf{U}\neg P), \mathbf{X}\neg(\top\mathbf{U}\neg P), \top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P),\\
&\neg\mathbf{X}\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big), \mathbf{X}\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)\}
\end{aligned}
$$

(lausejoukko K_9 saadaan taulun kahdesta haarasta). Näin saadaan atomit (b, K_7), (b, K_8), (b, K_9), (b, K_{10}) sekä (c, K_7), (c, K_8), (c, K_9) ja (c, K_{10}).

K-joukkojen välinen ”yhteensopivuusrelaatio” on nyt seuraava:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8	K_9	K_{10}
K_1	×	×			×		×			
K_2									×	×
K_3			×	×		×		×		
K_4										
K_5	×	×			×		×			
K_6			×	×		×		×		
K_7	×	×			×		×			
K_8			×	×		×		×		
K_9									×	×
K_{10}										

Graafi G:



G:n ei-triviaalit vahvasti kytketyt komponentit ovat

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \big\{(a, K_1), (a, K_5)\big\} \\
C_2 &= \big\{(a, K_3), (a, K_6)\big\} \\
C_3 &= \big\{(b, K_7), (c, K_7)\big\} \\
C_4 &= \big\{(b, K_8), (c, K_8)\big\} \\
C_5 &= \big\{(b, K_9), (c, K_9)\big\}
\end{aligned}
$$

Näistä komponenteista C_2 ja C_5 ovat itsetoteutuvia. On siis tutkittava, onko jompikumpi näistä komponenteista saavutettavissa jostakin graafin solmusta (a, K), missä $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big) \in K$. Koska lause $\neg\big(\top\mathbf{U}\neg(\top\mathbf{U}\neg P)\big)$ kuuluu esimerkiksi joukkoon K_6 ja C_2 on saavutettavissa solmusta (a, K_6) (koska $(a, K_6) \in C_2$), seuraa, että $\mathcal{M}, a \models \mathbf{E}\neg\mathbf{FG}P$ pätee. Siten $\mathcal{M}, a \models \mathbf{AFG}P$ *ei* päde mallissa $\mathcal{M}$.