T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 0
Ratkaisut

1. Jokaiselle toteutuvalle lauselogiikan lauseelle voidaan etsiä malli taulumenetelmällä merkitsemällä lause taulun juureen ja soveltamalla sen jälkeen taulusääntöjä, kunnes taulu on valmis.

   a)

$$
\begin{array}{llr}
1. & \neg\big((P \to Q) \to (Q \to P)\big) & \\
2. & P \to Q & (1) \\
3. & \neg(Q \to P) & (1) \\
4. & Q & (3) \\
5. & \neg P & (3) \\
6. & \neg P \quad (2) \;\big|\; 7. \quad Q & (2)
\end{array}
$$

   Taulun juurena olevan lauseen malli voidaan muodostaa valmiin taulun minkä tahansa avoimen haaran avulla keräämällä joukoksi kaikki haarassa esiintyvät (ei-negatoidut) atomilauseet. Yllä olevan taulun molemmista haaroista saadaan annetulle lauseelle sama malli $M = \{Q\}$.

   b)

$$
\begin{array}{ll}
1. & \big((P \lor \neg R) \leftrightarrow R\big) \land (P \to Q) \\
2. & (P \lor \neg R) \leftrightarrow R \quad (1) \\
3. & P \to Q \quad (1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llr|llr}
4. & (P \lor \neg R) \land R & (2) & 5. & \neg(P \lor \neg R) \land \neg R & (2) \\
11. & P \lor \neg R & (4) & 6. & \neg(P \lor \neg R) & (5) \\
12. & R & (4) & 7. & \neg R & (5) \\
13. & P \; (11) \;\big|\; 14.\ \neg R \; (11) & & 8. & \neg P & (6) \\
15. & \neg P \; (3) \;\big|\; 16.\ Q \; (3) \quad\big|\quad \times & & 9. & \neg\neg R & (6) \\
 & \times & & 10. & R & (9) \\
 & & & & \times &
\end{array}
$$

   Tauluun jää yksi avoin haara, josta saadaan lauseelle malli $M = \{P, Q, R\}$.

2. Lauselogiikan lauseen loogista seuraavuutta annetusta lausejoukosta voidaan tutkia taulumenetelmällä merkitsemällä taulun juureen kaikki lausejoukossa olevat lauseet ja lisäämällä tutkittavana olevan lauseen negaatio tauluun näiden jälkeen. Sovelletaan tämän jälkeen taulusääntöjä, kunnes taulu on valmis. Looginen seuraavuus pätee, jos tuloksena syntyneen taulun kaikki kaikki haarat ovat suljettuja. Tehtävässä saadaan siten taulu

$$
\begin{array}{lcr}
1. & Q \to P & \\
2. & R \to (P \land Q) & \\
3. & P \to (Q \land R) & \\
4. & \neg\neg Q & \\
5. & Q & (4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
6.\ \neg Q\ (1) & 7.\ P\ (1) \\
\times & \begin{array}{l|l}
8.\ \neg P\ (3) & 9.\ Q \land R\ (3) \\
\times & 10.\ Q\ (9) \\
 & 11.\ R\ (9) \\
 & \begin{array}{l|l}
12.\ \neg R\ (2) & 13.\ P \land Q\ (2) \\
\times & 14.\ P\ (13) \\
 & 15.\ Q\ (13)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Koska valmiiseen tauluun jää yksi avoin haara, lause $\neg Q$ *ei* seuraa loogisesti tehtävässä annetusta lausejoukosta Σ. Tulos voidaan perustella muodostamalla taulun avoimesta haarasta vastamalli loogiselle seuraavuudelle (malli, joka toteuttaa kaikki lausejoukon Σ lauseet, mutta jossa $\neg Q$ on epätosi). Vastamalliksi saadaan $M = \{P, Q, R\}$.

3. Lauselogiikan lause on konjunktiivisessa normaalimuodossa, jos se on muotoa $(L_1^1 \lor \cdots \lor L_{n_1}^1) \land \cdots \land (L_1^m \lor \cdots \lor L_{n_m}^m)$, missä kukin lauseista L_i^j on *literaali* (atomilause tai sen negaatio).

   Lauseen disjunktiivinen normaalimuoto on puolestaan muotoa $(L_1^1 \land \cdots \land L_{n_1}^1) \lor \cdots \lor (L_1^m \land \cdots \land L_{n_m}^m)$ (lauseet L_i^j literaaleja).

   Lauseen disjunktiivinen normaalimuoto saadaan esimerkiksi etsimällä ensin lauseen kaikki mallit taulumenetelmällä ja keräämällä syntyneen taulun kaikista avoimista haaroista syntyvät mallit yhdeksi disjunktioksi.

$$
\begin{array}{lll|l}
1. & & (P \to Q) \to (P \vee Q) & \\
2. & \neg(P \to Q) & (1) & 3. \quad P \vee Q \quad (1) \\
4. & P & (2) & 6. \quad P \quad (3) \mid 7. \quad Q \quad (3) \\
5. & \neg Q & (2) &
\end{array}
$$

Taulun avoimista haaroista saadaan taulun juuressa olevalle lauseelle disjunktiivinen normaalimuoto

$$(P \wedge \neg Q) \vee P \vee Q,$$

joka voidaan vielä sieventää muotoon

$$P \vee Q.$$

Konjunktiivisen normaalimuodon ratkaisemiseksi muodostetaan ensin lauseen *negaation* disjunktiivinen normaalimuoto:

$$
\begin{array}{llcl}
1. & \multicolumn{2}{l}{\neg\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big)} & \\
2. & & P \to Q & (1) \\
3. & & \neg(P \vee Q) & (1) \\
4. & & \neg P & (3) \\
5. & & \neg Q & (3) \\
6. & \neg P \quad (2) & \mid \; 7. \qquad Q & (2) \\
 & & \qquad\quad \times &
\end{array}
$$

Lauseen negaation

$$\neg\big((P \to Q) \to (P \vee Q)\big)$$

disjunktiiviseksi normaalimuodoksi saadaan taulun avoimesta haarasta

$$\neg P \wedge \neg Q.$$

Alkuperäisen lauseen konjunktiivinen normaalimuoto saadaan tästä negatoimalla ja käyttämällä sitten hyväksi De Morganin sääntöjä. Lauseen

$$(P \to Q) \to (P \vee Q)$$

konjunktiivinen normaalimuoto on siten

$$\neg(\neg P \wedge \neg Q) \equiv P \vee Q.$$

(Tässä tapauksessa siis lauseen disjunktiivinen ja konjunktiivinen normaalimuoto ovat samat. Tämä ei kuitenkaan päde yleisesti.)

4. a)

$$
\begin{array}{lcr}
1. & \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)\big) & \\
2. & \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) & (1) \\
3. & \forall x_1 \forall x_2 \big(P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)\big) & (1) \\
4. & \exists x_2 P(c, x_2) & (2, x_1/c) \\
5. & P(c, d) & (4, x_2/d) \\
6. & \forall x_2 \big(P(c, x_2) \rightarrow P(x_2, c)\big) & (3, x_1/c) \\
7. & P(c, d) \rightarrow P(d, c) & (6, x_2/d) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|lcr}
8. & \neg P(c,d)\ (7) & 9. & P(d,c) & (7) \\
 & \times & 10. & \forall x_2\big(P(d,x_2) \rightarrow P(x_2,d)\big) & (3, x_1/d) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
11. & P(d, c) \rightarrow P(c, d) & (10, x_2/c) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll|lcr}
12. & \neg P(d,c)\ (11) & 13. & P(c,d) & (11) \\
 & \times & 14. & P(c,c) \rightarrow P(c,c) & (6, x_2/c) \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcr}
15. & P(d, d) \rightarrow P(d, d) & (10, x_2/d) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcr|lcr}
16. & \neg P(c,c) & (14) & 17. & P(c,c) & (14) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
18.\ \neg P(d,d)\ (15) & 19.\ P(d,d)\ (15) & 20.\ \neg P(d,d)\ (15) & 21.\ P(d,d)\ (15) \\
\end{array}
$$

Valmiiseen tauluun jää neljä avointa haaraa. Kunkin avoimen haaran avulla voidaan määritellä rakenne (struktuuri), joka antaa mallin taulun juuressa olevalle lauseelle. Muodostetaan struktuuri $\mathcal{A}$ taulun vasemmanpuoleisimman avoimen haaran avulla. Olkoon universumi

$$A = \{1, 2\},$$

ja määritellään

$$c^{\mathcal{A}} = 1, \qquad d^{\mathcal{A}} = 2 \quad \text{sekä} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}.$$

Tarkistetaan, että lause on tosi rakenteessa $\mathcal{A}$. Koska esim. $\langle 1, 2\rangle = \langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}\rangle \in P^{\mathcal{A}}$, niin $\mathcal{A} \models P(c, d)$, joten edelleen myös

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

pätee. Myös

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1)),$$

on voimassa, koska

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{A} \models P(c, c) \rightarrow P(c, c), \\
&\mathcal{A} \models P(c, d) \rightarrow P(d, c), \\
&\mathcal{A} \models P(d, c) \rightarrow P(c, d) \text{ ja} \\
&\mathcal{A} \models P(d, d) \rightarrow P(d, d),
\end{aligned}
$$

sillä $c^{\mathcal{A}} = 1, d^{\mathcal{A}} = 2, \langle c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1, 1 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$ (jolloin $\mathcal{A} \not\models P(c,c)$), $\langle c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 1, 2 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ (jolloin $\mathcal{A} \models P(c,d)$), $\langle d^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2, 1 \rangle \in P^{\mathcal{A}}$ (joten $\mathcal{A} \models P(d,c)$) ja $\langle d^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}} \rangle = \langle 2, 2 \rangle \notin P^{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{A} \not\models P(d,d)$).

b) Tässä tapauksessa taulumenetelmän avulla ei saada aikaan valmista äärellistä taulua. Osoittautuu, että taulumenetelmää sovellettaessa käyttöön joudutaan ottamaan toistuvasti lisää uusia vakioita, koska taulun kaikkia haaroja ei saada ristiriitaisiksi. Vakioiden soveltaminen uudelleen tauluun syntyviin universaalisti kvantifioituihin lauseisiin pakottaa ottamaan käyttöön lisää uusia vakioita jne.

   (Tämä on esimerkki predikaattilogiikan *puoliratkeavuudesta*: ei ole olemassa systemaattista menetelmää, jonka avulla voidaan äärellisen monella askeleella joko etsiä malli mielivaltaiselle predikaattilogiikan lauseelle tai osoittaa se toteutumattomaksi.)

   Lause on kuitenkin tosi esim. seuraavassa rakenteessa $\mathcal{A}$:

   Olkoon universumi $A = \{1\}$. Lisäksi tarvitaan vakiosymboli c ja predikaatti P siten, että

$$c^{\mathcal{A}} = 1 \quad \text{ja} \quad P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1, 1 \rangle\}.$$

   Tarkistetaan, että

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \land \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3))$$

   pätee. Koska universumissa on ainoastaan yksi alkio ($c^{\mathcal{A}} = 1$) ja $\langle 1, 1 \rangle \in P$ (jolloin $\mathcal{A} \models P(c,c)$),

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2)$$

   pätee. Samasta syystä

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \land P(x_2, x_3) \to P(x_1, x_3)),$$

   koska

$$\mathcal{A} \models P(c,c) \land P(c,c) \to P(c,c).$$

5. a)

1.	$\neg\Big(\big(\forall x P(x) \land \forall x Q(x)\big) \to \forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)\Big)$	
2.	$\forall x P(x) \land \forall x Q(x)$	(1)
3.	$\neg\forall x\big(P(x) \lor Q(x)\big)$	(1)
4.	$\forall x P(x)$	(2)
5.	$\forall x Q(x)$	(2)
6.	$\neg\big(P(c) \lor Q(c)\big)$	$(3, x/c)$
7.	$\neg P(c)$	(6)
8.	$\neg Q(c)$	(6)
9.	$P(c)$	$(4, x/c)$
	$\times$	

b)

1.	$\neg\exists y\big(\exists x P(x) \to P(y)\big)$	
2.	$\neg\big(\exists x P(x) \to P(c)\big)$	$(1, y/c)$
3.	$\exists x P(x)$	(2)
4.	$\neg P(c)$	(2)
5.	$P(d)$	$(3, x/d)$
6.	$\neg\big(\exists x P(x) \to P(d)\big)$	$(1, y/d)$
7.	$\exists x P(x)$	(6)
8.	$\neg P(d)$	(6)
	$\times$	