

TAULUMENETELMÄ MODAALILOGIIKOILLE

1. Taulumenetelmä modaalilogiikalle **K**
2. Virheettömyys
3. Täydellisyys
4. Muut modaalilogiikat
5. Looginen seuraavuus

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luku 1.9 (s. 396 – 403).

Mahdollisten maailmojen nimeäminen

- Tavoitteena on nimetä mahdolliset maailmat siten, että saavutettavuusrelaatio voidaan päätellä nimistä suoraan.
- **Prefiksi** on mikä tahansa ei-tyhjä, äärellinen jono luonnollisia lukuja, kuten esim. $\langle 1 \rangle$ tai $\langle 11, 1, 1, 1, 111, 2 \rangle$.
- **Prefiksoitu lause** on muotoa σP , missä σ on prefiksi ja P lause, ja lausekkeen merkityksenä on, että P on tosi maailmassa nimeltä σ . Esimerkkejä: $\langle 1 \rangle (P \vee \neg P)$ ja $\langle 11, 1, 1, 111, 2 \rangle \Box \Box \Diamond P$.
- Merkintä: σn on prefiksi, joka saadaan prefiksistä σ liittämällä sen perään luku n . Esim. jos $\sigma = \langle 1 \rangle$, $\sigma 11 = \langle 1, 11 \rangle$.
- Prefiksi muotoa σn on **K-saavutettavissa** prefiksistä σ . Esim. $\langle 1, 11, 11 \rangle$ on **K-saavutettavissa** prefiksistä $\langle 1, 11 \rangle$.

1. Taulumenetelmä modaalilogiikalle **K**

- **Motivaatio:** Hilbert-tyylisiä todistuksia on usein vaikea löytää. Käytössä Modus Ponens -sääntö: jotta voidaan johtaa Q , täytyy johtaa P ja $P \rightarrow Q$. Mutta mikä on sopiva P ?

Esimerkki. Onko $\{A \rightarrow B, A \rightarrow C\} \models A \rightarrow (B \wedge C)$?

1. $A \rightarrow B$
2. $A \rightarrow C$
- ...
- n . $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \wedge C)))$

- **Alikaavperiaate:** lauseen Q todistuksessa tarvitaan vain Q :n alikaavoja \implies resoluutio, sekventtikalkyyli, taulumenetelmä.

Taulusäännöt

Modaalilogiikan taulumenetelmä koostuu lauselogiikan säännöistä ja modaalisäännöistä.

- Lauselogiikan säännöt (prefiksoiduille lauseille):

$$\frac{\sigma \neg \neg P}{\sigma P} \qquad \frac{\sigma \alpha}{\sigma \alpha_1 \quad \sigma \alpha_2} \qquad \frac{\sigma \beta}{\sigma \beta_1 \mid \sigma \beta_2}$$

Huom. Prefiksi σ ei muutu, joten nämä säännöt käsittelevät aina jotain tiettyä maailmaa (nimeltä σ).

Esimerkki

Sovelletaan lauselogiikan sääntöjä prefiksoituun lauseeseen $\langle 3, 2, 1 \rangle \neg((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$:

- | | | |
|--|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\langle 3, 2, 1 \rangle \neg((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow P)$ 2. $\langle 3, 2, 1 \rangle (\neg P \rightarrow Q)$ (1) 3. $\langle 3, 2, 1 \rangle \neg P$ (1) 4. $\langle 3, 2, 1 \rangle \neg \neg P$ (2) 6. $\langle 3, 2, 1 \rangle P$ (4) | | <ol style="list-style-type: none"> 5. $\langle 3, 2, 1 \rangle Q$ (2) |
| × | | |

Modaalisäännöt

Modaalisäännöt ovat seuraavat:

$$\begin{array}{l} \boxed{\sigma} \text{-sääntö:} \\ \frac{\sigma \Box P}{\sigma n P} \end{array}$$

mille tahansa tarjolla olevalle prefiksille σn .

$$\begin{array}{l} \neg \boxed{\sigma} \text{-sääntö:} \\ \frac{\sigma \neg \Box P}{\sigma n \neg P} \end{array}$$

jollekin rajoittamattomalle prefiksille σn .

Prefiksien esiintymät

Määritelmä. Prefiksi on taulun haarassa

- (i) **tarjolla**, jos se esiintyy haarassa, ja
- (ii) **rajoittamaton**, jos ei ole minkään haarassa esiintyvän prefiksin alkuosa.

Esimerkki. Prefiksi $\langle 1, 1 \rangle$ on prefiksien $\langle 1, 1, 12, 3 \rangle$ ja $\langle 1, 1 \rangle$ alkuosa.

Esimerkki

1. $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \rightarrow \Box \Box P)$
2. $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \Box \Box P$ (1)
4. $\langle 1, 1 \rangle \neg \Box P$ (3)
5. $\langle 1, 1 \rangle P$ (2)
6. $\langle 1, 1, 1 \rangle \neg P$ (4)
7. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Box P$ (3)
8. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (7)
9. $\langle 1, 2 \rangle P$ (2)
- ⋮

Taulutodistukset

Määritelmä.

- Taulun haara on **suljettu**, jos se sisältää
 - prefiksoidut lauseet σP ja $\sigma \neg P$ jollekin lauseelle P ja prefiksille σ ; tai
 - prefiksoidun lauseen $\sigma \perp$; tai
 - prefiksoidun lauseen $\sigma \neg \top$.
- Taulu on suljettu, jos jokainen sen haara on suljettu.
- Lauseen P **todistus** on taulu, jonka juuressa on prefiksoitu lause $\langle 1 \rangle \neg P$ ja joka on suljettu.

2. Virheettömyys

Teoreema. Jos lauseelle P löytyy todistus, lause P on **K**-pätevä.

Todistus. (Seuraavien osatulosten avulla)

- Määritellään taululle **K**-toteutuvuus: taulu on **K**-toteutuva, jos sen jokin haara vastaa tietyllä tapaa mallia.
- Osoitetaan, että
 - K**-toteutuva taulu ei voi olla suljettu.
 - Jos P ei ole **K**-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on **K**-toteutuva.
 - Jokainen sääntö säilyttää **K**-toteutuvuuden: jos taulu on **K**-toteutuva ennen säännön soveltamista, se on **K**-toteutuva myös säännön soveltamisen jälkeen.

Täten, jos P ei ole **K**-pätevä, lauseen P taulu säilyy avoimena. ■

Esimerkki

Taulutodistus lauseelle $\Box(P \wedge Q) \rightarrow (\Box P \wedge \Box Q)$:

- | | | |
|-----|--|------|
| 1. | $\langle 1 \rangle \neg (\Box(P \wedge Q) \rightarrow (\Box P \wedge \Box Q))$ | |
| 2. | $\langle 1 \rangle \Box(P \wedge Q)$ | (1) |
| 3. | $\langle 1 \rangle \neg (\Box P \wedge \Box Q)$ | (1) |
| 4. | $\langle 1 \rangle \neg \Box P$ | (3) |
| 5. | $\langle 1 \rangle \neg \Box Q$ | (3) |
| 6. | $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ | (4) |
| 7. | $\langle 1, 2 \rangle P \wedge Q$ | (2) |
| 8. | $\langle 1, 2 \rangle P$ | (7) |
| | × | |
| 9. | $\langle 1, 3 \rangle \neg Q$ | (5) |
| 10. | $\langle 1, 3 \rangle P \wedge Q$ | (2) |
| 11. | $\langle 1, 3 \rangle Q$ | (10) |
| | × | |

K-toteutuvuus

Määritelmä.

- Taulu on **K**-toteutuva, jos joku sen haaroista on **K**-toteutuva.
- Taulun haara on **K**-toteutuva, jos haarassa esiintyvien prefiksoitujen lauseiden joukko on **K**-toteutuva.
- Prefiksoitujen lauseiden joukko Σ on **K**-toteutuva, jos löytyy malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvaus \mathcal{X} joukossa Σ esiintyvistä prefikseistä joukolle S siten, että
 - Jos prefiksit σ ja τ esiintyvät joukossa Σ ja τ on **K**-saavutettavissa prefiksistä σ , tällöin $\mathcal{X}(\sigma)R\mathcal{X}(\tau)$.
 - Jos $\sigma P \in \Sigma$, niin $\mathcal{M}, \mathcal{X}(\sigma) \Vdash P$.

Todistuksen yksityiskohtia

Edellisen määritelmän nojalla voidaan todeta seuraavaa:

- (i) **K**-toteutuva taulu ei voi olla suljettu.
- (ii) Jos lause P ei ole **K**-pätevä, taulu $\langle 1 \rangle \neg P$ on **K**-toteutuva.
 Jos lause P ei ole **K**-pätevä, sille löytyy vastamalli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jonka jossain maailmassa $s \in S$, $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$. Siis taulu $\{\langle 1 \rangle \neg P\}$ on **K**-toteutuva kuvauksella $\mathcal{N}(\langle 1 \rangle) = s$.
- (iii) Olkoon taulu Γ **K**-toteutuva. Taulussa Γ on haara, jonka lauseet Σ ovat **K**-toteutuvia mallilla $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja kuvauksella \mathcal{N} .
 Osoitetaan, että kun sovelletaan mitä tahansa taulusääntöä, näin saatava taulu Γ' on myös **K**-toteutuva.

- $\frac{\sigma\alpha}{\sigma\alpha_1}$
 $\sigma\alpha_2$
 Käsitellään samaan tapaan; lausejoukkona $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\alpha_1, \sigma\alpha_2\}$.
- $\frac{\sigma\Box P}{\sigma nP}$ tarjolla olevalle prefiksille σn .
 Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma nP\}$.
 Koska $\sigma\Box P \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \Box P$, joten kaikille t , $\mathcal{N}(\sigma)Rt$,
 $\mathcal{M}, t \Vdash P$.
 Koska σn on **K**-saavutettavissa σ :sta, $\mathcal{N}(\sigma)R\mathcal{N}(\sigma n)$. Siis
 $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash P$.
 $\implies \Gamma'$ on **K**-toteutuva.

Taulusäännöt säilyttävät K-toteutuvuuden

Sovelletaan taulusääntöä **K**-toteutuvaan haaraan (olkoon Σ vastaava prefiksoitu lausejoukko):

- $\frac{\sigma\beta}{\sigma\beta_1 \mid \sigma\beta_2}$
 Tällöin taulussa Γ' on haarat, joiden prefiksoidut lausejoukot ovat $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_1\}$ ja $\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\sigma\beta_2\}$.
 Koska $\sigma\beta \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta$,
 joten $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \beta_2$.
 $\implies \Gamma'$ on **K**-toteutuva.

- $\frac{\sigma\neg\Box P}{\sigma n\neg P}$ jollekin rajoittamattomalle prefiksille σn .
 Tällöin taulussa Γ' haara, jonka lausejoukko $\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\sigma n\neg P\}$.
 Koska $\sigma\neg\Box P \in \Sigma$, seuraa $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma) \Vdash \neg\Box P$, joten on olemassa t ,
 $\mathcal{N}(\sigma)Rt$, $\mathcal{M}, t \Vdash \neg P$.
 Koska σn ei ole mikään Σ prefiksin alkuosa, kuvausta \mathcal{N} voidaan laajentaa: $\mathcal{N}(\sigma n) = t$. Tällöin $\mathcal{M}, \mathcal{N}(\sigma n) \Vdash \neg P$.
 $\implies \Gamma'$ on **K**-toteutuva.

3. Täydellisyys

- Miten taata, että jokaiselle pätevälle lauseelle löytyy taulutodistus, kun taulun haarat voivat olla äärettömiä?
- Milloin sääntöjä on sovellettu riittävästi/reilusti?
- Taulun rakentamiseen tarvitaan **systemaattinen menetelmä**, jossa kaikkia sääntöjä on käytetty riittävästi eli jokaiselle avoimelle haaralle θ pätee:
 - (i) Jos $\sigma \neg \neg P \in \theta$, tällöin $\sigma P \in \theta$.
 - (ii) Jos $\sigma \beta \in \theta$, tällöin $\sigma \beta_1 \in \theta$ tai $\sigma \beta_2 \in \theta$.
 - (iii) Jos $\sigma \alpha \in \theta$, tällöin $\sigma \alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma \alpha_2 \in \theta$.
 - (iv) Jos $\sigma \neg \square Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$, jollakin n .
 - (v) Jos $\sigma \square Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn , jotka tarjolla θ :ssa.

Systemaattinen K-taulu lauseelle P :

1. Merkitään taulun juureen $\langle 1 \rangle \neg P$.
2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:
 - 2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ .
 - 2.2 Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ jokin seuraavista:
 - Jos σQ muotoa $\sigma \alpha$, jatketaan haaraa θ solmuilla $\sigma \alpha_1$ ja $\sigma \alpha_2$.
 - Jos σQ on muotoa $\sigma \beta$, lisätään haaran θ loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma \beta_1$ ja $\sigma \beta_2$ (haarautuminen).
 - Jos σQ on muotoa $\sigma \neg \square P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn .
 - Jos σQ on muotoa $\sigma \square P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville σn lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n P$ sekä lisäksi solmu $\sigma \square P$.
 - 2.3 Merkitään σQ käytetyksi.

Huomattavaa

- Systemaattinen menetelmä takaa täydellisyyden mutta voi sallia äärettömät taulut, mikäli todistettava lause ei ole pätevä.
- **Ratkaisumenetelmä** takaisi, että taulun rakentaminen päättyy äärellisellä askelmäärällä, olipa todistettava lause pätevä tai ei.
- Palaamme ratkeavuuskysymykseen myöhemmin.

Teoreema. (Täydellisyys) Jos P on **K**-pätevä, lauseen P systemaattinen **K**-taulu sulkeutuu.

Todistus. Osoitetaan, että jos lauseen P systemaattisessa **K**-taulussa on avoin haara, P ei ole **K**-pätevä. Olkoon θ tällainen haara ja $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ seuraava **vastamalli**:

1. S on θ :ssa esiintyvien prefiksien joukko.
2. $\sigma R \tau$ joss τ on **K**-saavutettavissa σ :sta.
3. $v(\sigma, Q) = \text{true}$ joss σQ esiintyy θ :ssa atomilauseelle Q .

Teoreeman todistamiseen riittää nyt seuraava apulos:

$$\text{jos } \sigma Q \in \theta, \text{ niin } \mathcal{M}, \sigma \Vdash Q.$$

Syynä tähän on, että $\langle 1 \rangle \neg P$ kuuluu jokaiseen haaraan, jolloin $\mathcal{M}, \langle 1 \rangle \Vdash \neg P$. Tämä tarkoittaa, että P ei ole **K**-pätevä. ■

Induktiotodistus

Todistetaan kaikille prefiksoiduille lauseille σQ , että

jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.

Todistus. Käytetään induktiota lauseen Q pituuden suhteen.

- (Q atomilause) Jos $\sigma Q \in \theta$, niin $v(\sigma, Q) = \text{true}$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.
- (Q atomilauseen negaatio) Jos $\sigma \neg Q' \in \theta$ ja Q' on atomilause, niin $\sigma Q' \notin \theta$, joten $\mathcal{M}, \sigma \not\Vdash Q'$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg Q'$.

Induktiohypoteesi [IH]:

Jos Q on lyhyempi kuin j ja $\sigma Q \in \theta$, tällöin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$.

Olkoon lauseen Q pituus j . Nyt Q on muodoltaan jokin seuraavista:

Esimerkki. Tutkitaan, onko $\Box P \rightarrow \Box \Box P$ **K**-pätevä.

Rakennetaan systemaattinen **K**-taulu:

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| 1. | $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \rightarrow \Box \Box P)$ | (1) | Koska taulu ei suljeudu, voidaan avoimesta haarasta koota <i>vastamalli</i> |
| 2. | $\langle 1 \rangle \Box P$ | (1) | $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, missä |
| 3. | $\langle 1 \rangle \neg \Box \Box P$ | (1) | $S = \{ \langle 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle \}$ |
| 4. | $\langle 1 \rangle \Box P$ | (2) | $R = \{ \langle \langle 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle \rangle, \langle \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle \rangle \}$ ja |
| 5. | $\langle 1, 2 \rangle \neg \Box P$ | (3) | $v(\sigma, P) = \text{true}$ joss $\sigma = \langle 1, 2 \rangle$. |
| 6. | $\langle 1, 2 \rangle P$ | (4) | Nyt $\mathcal{M}, \langle 1 \rangle \not\Vdash \Box P \rightarrow \Box \Box P$. |
| 7. | $\langle 1 \rangle \Box P$ | (4) | |
| 8. | $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ | (5) | |
| 9. | $\langle 1, 2 \rangle P$ | (7) | |
| 10. | $\langle 1 \rangle \Box P$ | (7) | |
| | ... | | |

- (Muotoa $\neg \neg Q$) Jos $\sigma \neg \neg Q \in \theta$, tällöin $\sigma Q \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \neg \neg Q$.
- (β -lause) Jos $\sigma \beta \in \theta$, tällöin $\sigma \beta_1 \in \theta$ tai $\sigma \beta_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_1$ tai $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \beta$.
- (α -lause) Jos $\sigma \alpha \in \theta$, tällöin $\sigma \alpha_1 \in \theta$ ja $\sigma \alpha_2 \in \theta$.
[IH] $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_1$ ja $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha_2$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \alpha$.
- (Muotoa $\neg \Box Q$) Jos $\sigma \neg \Box Q \in \theta$, $\sigma n \neg Q \in \theta$ jollakin n .
[IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash \neg Q$. Siis $\mathcal{M}, \sigma \not\Vdash \Box Q$, koska $\sigma R \sigma n$.
- (Muotoa $\Box Q$) Jos $\sigma \Box Q \in \theta$, $\sigma n Q \in \theta$ kaikilla σn , jotka tarjolla θ :ssa. [IH] $\mathcal{M}, \sigma n \Vdash Q$. Täten $\mathcal{M}, \sigma \Vdash \Box Q$.

Siis jokaiselle avoimelle haaralle θ , prefiksille σ ja lauseelle Q :
jos $\sigma Q \in \theta$, niin $\mathcal{M}, \sigma \Vdash Q$. ■

4. Muut modaalilogiikat

- Laajennetaan edellä esitetty taulumenetelmä käsittelemään myös muita modaalilogiikoita kuin **K**.

Määritelmä. Prefiksi τ on prefiksin σ yksinkertainen jatko, jos τ on muotoa σn jollekin luonnolliselle luvulle n .

- Taulumenetelmä modaalilogiikalle **L**:

$\neg \Box$ -sääntö:

$$\frac{\sigma \neg \Box P}{\tau \neg P} \qquad \frac{\sigma \Diamond P}{\tau P}$$

missä τ on haarassa rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

Taulumenetelmä modaalilogiikalle L

- sääntö:

$$\frac{\sigma \Box P}{\tau P}$$

$$\frac{\sigma \neg \Diamond P}{\tau \neg P}$$

missä τ L-saavutettavissa prefiksistä σ ja

- logiikoille **K, KB, K4** (huom. ei-sarjallisia)
 τ on tarjolla haarassa;
- logiikoille **D, T, DB, B, D4, S4, S5** (huom. sarjallisia)
 - τ on tarjolla haarassa **tai**
 - τ on rajoittamaton prefiksin σ yksinkertainen jatko.

Prefiksien välinen saavutettavuus (jatkoa)

Saavutettavuus tiettyjen logiikkojen tapauksessa:

Logiikka L	L-saavutettavuus
K, D	yleinen
T	yleinen, refleksiivinen
KB, DB	yleinen, käänteinen
B	yleinen, refleksiivinen, käänteinen
K4, D4	yleinen, transitiivinen
S4	yleinen, refleksiivinen, transitiivinen
S5	universaali

Prefiksien välinen saavutettavuus

L-saavutettavuuden määrittely edellyttää tiettyjen saavutettavuusrelaatioiden ominaisuuksien esille ottamista.

Määritelmä. Prefiksien välinen saavutettavuusrelaatio on

- yleinen, jos σn on saavutettavissa prefiksistä σ kaikilla n ;
- käänteinen, jos σ on saavutettavissa prefiksistä σn kaikilla n ;
- refleksiivinen, jos σ on saavutettavissa σ :sta;
- transitiivinen, jos τ on saavutettavissa prefiksistä σ aina, kun σ on τ :n aito alkuosa.
- universaalinen, jos prefiksi on saavutettavissa mistä tahansa prefiksistä.

Esimerkki: D-pätevyys

Haetaan **D**-taulutodistus lauseelle $\Box P \rightarrow \neg \Box \neg P$:

- $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \rightarrow \neg \Box \neg P)$
- $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
- $\langle 1 \rangle \neg \neg \Box \neg P$ (1)
- $\langle 1 \rangle \Box \neg P$ (3)
- $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (4) Huom. 2. (b)
- $\langle 1, 2 \rangle P$ (2)

×

(**D**-saavutettavuus: yleinen)

Esimerkki: T-pätevyys

Muodostetaan **T**-taulutodistus lauseelle $\Box P \rightarrow P$:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \rightarrow P)$
2. $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg P$ (1)
4. $\langle 1 \rangle P$ (2) Huom. refleksiivisyys

×

(**T**-saavutettavuus: yleinen ja refleksiivinen)

Esimerkki: KB-pätevyys

Etsitään **KB**-taulutodistus lauseelle $P \rightarrow \Box \Diamond P$:

1. $\langle 1 \rangle \neg(P \rightarrow \Box \Diamond P)$
2. $\langle 1 \rangle P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \Box \Diamond P$ (1)
4. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Diamond P$ (3)
5. $\langle 1 \rangle \neg P$ (4) Huom. käänteisyys

×

(**KB**-saavutettavuus: yleinen ja käänteinen)

Esimerkki: K4-pätevyys

Haetaan **K4**-taulutodistus lauseelle $\Box P \rightarrow \Box \Box P$:

1. $\langle 1 \rangle \neg(\Box P \rightarrow \Box \Box P)$
2. $\langle 1 \rangle \Box P$ (1)
3. $\langle 1 \rangle \neg \Box \Box P$ (1)
4. $\langle 1, 2 \rangle \neg \Box P$ (3)
5. $\langle 1, 2, 3 \rangle \neg P$ (4)
6. $\langle 1, 2, 3 \rangle P$ (2) Huom. transit.

×

(**K4**-saavutettavuus: yleinen ja transitiivinen)

Systemaattinen L-taulu lauseelle P:

Muutetaan systemaattisen **K**-taulun kohtaa 2.2: Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ :

- Jos σQ on muotoa $\sigma \neg \Box P$ ($\sigma \Diamond P$), lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ ($\sigma n P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn .

- Jos σQ on muotoa $\sigma \Box P$ ($\sigma \neg \Diamond P$),

(a) kun **L** on **K, KB, K4, T, B, S4, S5**:

jokaiselle θ :ssa tarjolla olevalle σ' , joka on **L**-saavutettavissa σ :sta, lisätään θ :n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma' \neg P$) ja lopuksi $\sigma \Box P$ ($\sigma \neg \Diamond P$).

(b) kun **L** on **D, DB, D4**:

jokaiselle θ :ssa tarjolla olevalle σ' , joka on **L**-saavutettavissa σ :sta, lisätään θ :n loppuun solmu $\sigma' P$ ($\sigma' \neg P$). Jos tällaisia prefiksejä σ' ei ole, lisätään θ :n loppuun solmu $\sigma n P$ ($\sigma n \neg P$) jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn . Kummassakin tapauksessa lisätään vielä haaran loppuun $\sigma \Box P$ ($\sigma \neg \Diamond P$).

S5-taulut

- Modaalilogiikassa **S5** mallien saavutettavuusrelaatio on ekvivalenssirelaatio (universaali saavutettavuus).
- Prefikseiksi riittävät luonnolliset luvut.

$$\neg\Box\text{-sääntö:} \quad \frac{n\neg\Box P}{k\neg P} \quad \frac{n\Diamond P}{kP}$$

missä k ei esiinny haarassa.

$$\Box\text{-sääntö:} \quad \frac{n\Box P}{kP} \quad \frac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$$

mille tahansa k .

Systemaattinen S5-taulu lauseelle P :

1. Merkitään taulun juureen $1\neg P$.
2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:
 - 2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu nQ .
 - 2.2 Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle nQ kautta kulkevalle haaralle θ :
 - Jos nQ muotoa $n\alpha$, jatketaan haaraa θ solmuilla $n\alpha_1$ ja $n\alpha_2$.
 - Jos nQ on muotoa $n\beta$, lisätään haaran θ loppuun kaksi lapsisolmua $n\beta_1$ ja $n\beta_2$ (haarautuminen).
 - Jos nQ on muotoa $n\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $k\neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle k sekä tämän jälkeen kX kullekin haarassa esiintyvälle $j\Box X$.
 - Jos nQ on muotoa $n\Box P$, kaikille tässä haarassa tarjolla oleville k lisätään haaran θ loppuun solmu kP .
 - 2.3 Merkitään nQ käytetyksi.

Esimerkki: S5-pätevyys

Haetaan **S5**-taulutodistus lauseelle $\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P$:

1. $1\neg(\neg\Box P \rightarrow \Box\neg\Box P)$
2. $1\neg\Box P$ (1)
3. $1\neg\Box\neg\Box P$ (1)
4. $2\neg P$ (2)
5. $3\neg\neg\Box P$ (3)
6. $3\Box P$ (5)
7. $2P$ (6)

×

KD45-taulut

- Modaalilogiikan **KD45** mallit voidaan muodostaa **S5**-malleista $\langle S, R \rangle$ lisäämällä maailma $s \notin S$ siten, että

$$S' = S \cup \{s\} \text{ ja } R' = R \cup \{\langle s, t \rangle \mid t \in S\}.$$

- Prefikseiksi riittävät luonnolliset luvut.

$$\neg\Box\text{-sääntö:} \quad \frac{n\neg\Box P}{k\neg P} \quad \frac{n\Diamond P}{kP}$$

missä k ei esiinny haarassa.

$$\Box\text{-sääntö:} \quad \frac{n\Box P}{kP} \quad \frac{n\neg\Diamond P}{k\neg P}$$

mille tahansa $k \neq 1$.

Esimerkki: KD45-pätevyys

Vertaillaan seuraavia **KD45**-tauluja:

$(\Box P \rightarrow P)$: 1. $1 \neg(\Box P \rightarrow P)$

2. $1 \Box P$ (1)

3. $1 \neg P$ (1)

$\Box(\Box P \rightarrow P)$: 1. $1 \neg\Box(\Box P \rightarrow P)$

2. $2 \neg(\Box P \rightarrow P)$ (1)

3. $2 \Box P$ (2)

4. $2 \neg P$ (2)

5. $2 P$ (3)

×

Esimerkki: K-seuraavuuden tutkiminen

Osoitetaan $\{P\} \models_K \{\Box P \rightarrow Q\} \implies Q$:

1. $\langle 1 \rangle \neg Q$

2. $\langle 1 \rangle \Box P \rightarrow Q$ (LP)

3. $\langle 1 \rangle \neg \Box P$ (2) | 4. $\langle 1 \rangle Q$ (2)

5. $\langle 1, 2 \rangle \neg P$ (2) | ×

6. $\langle 1, 2 \rangle P$ (GP)

×

5. Looginen seuraavuus

- Tehtävänä ratkaista, onko $\Sigma \models_L Y \implies P$.
- Taulumenetelmässä asetetaan juurisolmuksi $\langle 1 \rangle \neg P$ ja käytetään taulun rakentamiseen modaalilogiikan **L** mukaisia taulusääntöjä sekä kahta lisäsääntöä premissien käsittelyyn:

Globaali sääntö: solmulla σQ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa haarassa tarjolla olevalla prefiksillä σ ja mille tahansa globaalille premissille $Q \in \Sigma$.

Lokaali sääntö: solmulla $\langle 1 \rangle Q$ voidaan jatkaa mitä tahansa haaraa mille tahansa lokaalille premissille $Q \in Y$.