PERUSTULOKSIA MALLEISTA

1. Suhde predikaattilogiikkaan
2. Generoitu alikehys
3. Kehysten p-morfismi
4. Looginen seuraavuus
5. Deduktioteoreema

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.3 – 1.4 (s. 377 – 384).

1. Suhde predikaattilogiikkaan

- Kehys voidaan nähdä struktuurina predikaattilogiikalle, jossa on yksi kaksipaikkainen predikaattisymboli (R):

  predikaattilogiikan struktuuri $\mathcal{S}$ voidaan esittää muodossa $\langle U, R^{\mathcal{S}} \rangle$, missä U on struktuurin universumi ja relaatio $R^{\mathcal{S}} \subseteq U \times U$ predikaattisymbolin R tulkinta.

- Propositionaalista modaalilogiikkaa voidaan käyttää tietyssä tilanteissa kvantifioidun logiikan tilalla:

  predikaattilogiikan lauseelle P voidaan antaa vastaava modaalilause P' siten, että P on tosi struktuurissa joss P' on pätevä struktuurissa tulkittuna modaalilogiikan kehykseksi.

Refleksiivisten relaatioiden karakterisointi

Esimerkki. Lause $\Box P \rightarrow P$ on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle \iff$ R on refleksiivinen (eli $\forall x R(x,x)$ on tosi struktuurissa $\langle S, R \rangle$).

Todistus. ($\Longleftarrow$) Olkoon $R \subseteq S \times S$ refleksiivinen relaatio, $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehykseen $\langle S, R \rangle$ perustuva malli ja $s \in S$.

Jos $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$, koska sRs. Täten $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P \rightarrow P$.

($\Longrightarrow$) Oletetaan, että R ei ole refleksiivinen kehyksessä $\langle S, R \rangle$. Tällöin on olemassa $s_0 \in S$, jolle $s_0 R s_0$ ei päde.

Olkoon $v(s, P) = \text{true}$ jos $s_0 R s$ muutoin $v(s, P) = \text{false}$. Nyt $v(s_0, P) = \text{false}$.

Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$. Tällöin $\mathcal{M}, s_0 \Vdash \Box P$ mutta $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash P$.

Siis $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash \Box P \rightarrow P$, joten $\Box P \rightarrow P$ ei ole pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$. ■

Määriteltävyydestä

- Esimerkin nojalla predikaattilogiikan lause $\forall x R(x,x)$ voidaan ilmaista propositionaalisen modaalilogiikan lauseella $\Box P \rightarrow P$.
- Mutta kuinka pitkälle modaalilogiikka riittää?

  Minkälaisia predikaattilogiikan lauseita ei voida esittää modaalilogiikalla?

- Tarkastellaan muutamaa pätevyyden säilyttävää operaatiota kehyksille (generoitu alikehys, pistevieras unioni ja p-morfismi), jotka antavat viitteitä modaalilogiikan ilmaisuvoiman rajoista.

  ☞ Lauseita $\exists x \exists y R(x,y)$, $\forall x \forall y R(x,y)$ ja $\forall x \neg R(x,x)$ ei voida ilmaista propositionaalisella modaalilogiikalla.

2. Generoitu alikehys

Määritelmä. Olkoon $\langle S,R\rangle$ kehys ja $\emptyset \subset S_0 \subseteq S$ joukko maailmoja.

Joukon S_0 generoima alikehys on kehys $\langle S^*,R^*\rangle$, missä S^* on pienin R-suljettu S:n alijoukko, joka sisältää S_0:n ja R^* on R rajoitettuna joukolle S^* ($R^* = \{\langle s_1,s_2\rangle \in R \mid s_1,s_2 \in S^*\} = R\cap(S^*\times S^*)$).

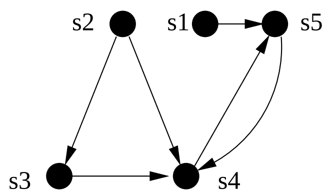
Joukon S alijoukko H on R-suljettu, jos $t\in H$ aina, kun $s\in H$ ja sRt.

Huom. S^* on niiden maailmojen joukko, jotka voidaan saavuttaa S_0:sta (transitiivisesti).

Määritelmä. Mallin $\langle S,R,v\rangle$ generoitu alimalli on malli $\langle S^*,R^*,v^*\rangle$, missä $\langle S^*,R^*\rangle$ on generoitu alikehys ja v^* on v rajoitettuna S^*:lle. Alikehys on generoitu, jos se on jonkun maailmojen joukon generoima.

Esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa kehystä:



- Joukko $S_0 = \{s2\}$ generoi alikehyksen, missä $S^* = \{s2,s3,s4,s5\}$ ja $R^* = R\cap(S^*\times S^*)$ vastaa näiden välisiä kaaria.
- Joukko $S_0 = \{s5\}$ generoi alikehyksen, missä $S^* = \{s4,s5\}$.
- Joukko $S_0 = \{s1,s3\}$ generoi alikehyksen, missä $S^* = \{s1,s3,s4,s5\}$.

Generoidun alimallin ominaisuudet

Propositio. Jos $\mathcal{M}^*$ on $\mathcal{M}$:n generoitu alimalli, niin jokaiselle lauseelle P ja jokaiselle mallin $\mathcal{M}^*$ maailmalle s pätee:

$$\mathcal{M},s \mid\mid\!- P \iff \mathcal{M}^*,s \mid\mid\!- P.$$

Esimerkki. Olkoon $S=\{s,t_1,t_2\}$ ja $R=\{\langle t_1,t_2\rangle\}$.

Joukko $\{s\}$ generoi alikehyksen $\langle S^*,R^*\rangle$, missä $S^*=\{s\}$ ja $R^*=\{\}$.

Nyt $\exists x\exists y R(x,y)$ on tosi kehyksessä $\langle S,R\rangle$
ja $\exists x\exists y R(x,y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S^*,R^*\rangle$.

Mutta kaikille lauseille P ja jokaiselle valuaatiolle v on voimassa: $\langle S,R,v\rangle,s \mid\mid\!- P \iff \langle S^*,R^*,v^*\rangle,s \mid\mid\!- P$.

$\Longrightarrow$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S,R\rangle$ joss R:lle pätee $\exists x\exists y R(x,y)$.

Kehyksien pistevieras unioni

Pistevieras unioni: 'kopiot' kehyksistä niin, etteivät maailmojen joukot leikkaa ja otetaan unioni maailmoista ja saavutettavuusrelaatioista.

Propositio. Lause P on pätevä kahden kehyksen pistevieraassa unionissa joss P on pätevä kummassakin kehyksessä.

Esimerkki. Olkoon $S=\{s\}$ ja $R=\{\langle s,s\rangle\}$.

Kehyksen $\langle S,R\rangle$ pistevieras unioni itsensä kanssa $\langle S,R\rangle\dot\cup\langle S,R\rangle = \langle S',R'\rangle$ missä $S'=\{s_1,s_2\}$ ja $R'=\{\langle s_1,s_1\rangle,\langle s_2,s_2\rangle\}$.

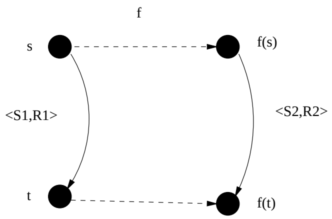
Nyt $\forall x\forall y R(x,y)$ on tosi kehyksessä $\langle S,R\rangle$ ja $\forall x\forall y R(x,y)$ on epätosi kehyksessä $\langle S',R'\rangle$, mutta kaikille lauseille P on voimassa: $\langle S,R\rangle \models P \iff \langle S',R'\rangle \models P$.

$\Longrightarrow$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S,R\rangle$ joss R:lle pätee $\forall x\forall y R(x,y)$.

3. Kehysten p-morfismi

Määritelmä. Kuvaus $f : \langle S_1, R_1 \rangle \mapsto \langle S_2, R_2 \rangle$ on p-morfismi joss

1. f kuvaa joukon S_1 joukolle S_2 surjektiivisesti siten, että jokaiselle $s \in S_2$ olemassa $t \in S_1$, jolle $s = f(t)$,
2. kaikille $s,t \in S_1$, jos sR_1t, niin $f(s)R_2 f(t)$ ja
3. kaikille $s \in S_1$ ja $u \in S_2$, jos $f(s)R_2u$, niin on olemassa $t \in S_1$ siten, että sR_1t ja $f(t) = u$.

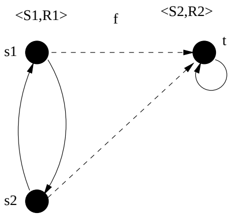


Esimerkki

Olkoon $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehys, missä $S_1 = \{s_1, s_2\}$ ja $R_1 = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_1 \rangle\}$.

Olkoon $\langle S_2, R_2 \rangle$ kehys, missä $S_2 = \{t\}$ ja $R_2 = \{\langle t, t \rangle\}$.

Määritellään kuvaus f siten, että $f(s_1) = f(s_2) = t$.



☞ Funktio f on p-morfismi.

Kehysten p-morfismien ominaisuudet

Propositio. Jos on olemassa p-morfismi kehykseltä $\langle S_1, R_1 \rangle$ kehykselle $\langle S_2, R_2 \rangle$, niin jokainen ensimmäisessä kehyksessä pätevä lause on pätevä myös toisessa kehyksessä.

Esimerkki. (Jatkoa edelliseen esimerkkiin)

Nyt $\forall x \neg R(x,x)$ on tosi kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$ ja $\forall x \neg R(x,x)$ on epätosi kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

Kuitenkin jokaiselle lauseelle P: jos P on pätevä kehyksessä $\langle S_1, R_1 \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S_2, R_2 \rangle$.

$\Longrightarrow$ Ei ole lausetta P siten, että P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$ joss R:lle pätee $\forall x \neg R(x,x)$.

4. Looginen seuraavuus

- Lauselogiikassa looginen seuraavuus ($\Sigma \models P$) edellyttää, että

  P on tosi jokaisessa mallissa, jossa Σ on tosi.

- Modaalilogiikka tarjoaa useita mahdollisia tulkintoja:
  - Kaikille malleille pätee, että P on tosi jokaisessa mallin maailmassa, jossa Σ on tosi.
  - P on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä.
  - P on pätevä jokaisessa kehyksessä, jossa Σ on pätevä.
- Otamme käyttöön loogisen seuraavuuden käsitteen, joka yhdistää kaikki nämä kolme tulkintaa.

Loogisen seuraavuuden määritelmä

Määritelmä. Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, Σ ja Υ lausejoukkoja ja P lause. Lause P seuraa loogisesti globaaleista premisseista Σ ja lokaaleista premisseista Υ kehyslogiikassa $\mathbf{L}$ ($\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$) joss

jokaiselle joukon $\mathbf{L}$ kehykseen $\langle S, R \rangle$ perustuvalle mallille $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$, jossa $\mathcal{M} \models \Sigma$, ja jokaiselle sen maailmalle $s \in S$, jossa $\mathcal{M}, s \models \Upsilon$, pätee $\mathcal{M}, s \models P$.

Esimerkki. Olkoon $\mathbf{L}$ kaikkien kehysten joukko.

Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$.

Mutta $\{P\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow \Box P$ ja $\emptyset \not\models_{\mathbf{L}} \{P\} \Longrightarrow \Box P$.

Loogisen seuraavuuden ominaisuuksia

Määritelmä. Jos $\mathbf{L}_1$ ja $\mathbf{L}_2$ ovat kaksi kehysjoukkoa ja $\mathbf{L}_2 \subseteq \mathbf{L}_1$, sanomme, että $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$ ja kirjoitamme $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$.

Jos $\mathbf{L}_1$ on heikompi kuin $\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_1$-pätevät lauseet ovat $\mathbf{L}_2$-päteviä.

Teoreema. (Monotonisuus) Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, $\Upsilon_1 \subseteq \Upsilon_2$ ja $\mathbf{L}_1 \leq \mathbf{L}_2$. Tällöin jos $\Sigma_1 \models_{\mathbf{L}_1} \Upsilon_1 \Longrightarrow P$, niin $\Sigma_2 \models_{\mathbf{L}_2} \Upsilon_2 \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Korvattavuus) Olkoon Q ja Q' samat lauseet paitsi, että jossain paikoissa, joissa P on Q:n alilause, P' on Q':n alilause. Tällöin

$\Sigma \cup \{P \leftrightarrow P'\} \models_{\mathbf{L}} \emptyset \Longrightarrow Q \leftrightarrow Q'$.

Huom. $\{\} \not\models_{\mathbf{L}} \{P \leftrightarrow P'\} \Longrightarrow \Box P \leftrightarrow \Box P'$.

4. Deduktioteoreema

Lauselogiikan tapauksessa: $\Sigma \cup \{Q\} \models P \iff \Sigma \models Q \to P$.

Teoreema. (Paikallinen deduktioteoreema)
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{Q\} \Longrightarrow P$ joss $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q \to P$.

Määritelmä. Lauseelle P, $\Box^0 P = P$ ja $\Box^n P = \Box(\Box^{n-1} P)$.

Esimerkki. $\Box^3 P = \Box\Box\Box P$.

Globaali deduktioteoreema:

$\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$ joss jollekin n
$\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$.

(Tämä tulos ei päde kaikille kehysjoukoille $\mathbf{L}$.)

Globaali deduktioteoreema ja kompaktius

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema I)
Jos, jollekin n, $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$.

Teoreema. (Globaali deduktioteoreema II)
Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu generoitujen alikehysten ja ultraproduktioiden suhteen. Tällöin jos $\Sigma \cup \{Q\} \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \cup \{\Box^0 Q, \Box^1 Q, \ldots, \Box^n Q\} \Longrightarrow P$ jollekin n.

Teoreema. (Kompaktius) Olkoon $\mathbf{L}$ joukko kehyksiä, joka on suljettu ultraproduktioiden suhteen. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ja $\Upsilon_0 \subseteq \Upsilon$ siten, että $\Sigma_0 \models_{\mathbf{L}} \Upsilon_0 \Longrightarrow P$.

(Tällä kurssilla ei käsitellä em. ultraproduktioehtoa vaan annetaan jatkossa esimerkkejä logiikoista, joille se pätee).