JOHDANTOA MODAALILOGIIKKAAN

1. Modaalilogiikka
2. Esimerkki tietämyslogiikasta: mutaiset lapset
3. Semanttinen tarkastelu
4. Syntaktinen tarkastelu

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvun 1 alku (s. 368 – 371).

1. Modaalilogiikka

- on käsitteiden *välttämätön, aikominen, tietäminen, uskominen, tuleva, mennyt, todistuva, tosi tapahtuman jälkeen,* ... logiikkaa.
- Mitkä ovat ko. käsitteiden ominaisuudet?

  Jos tiedät jotain, tiedätkö että tiedät sen?

  Jos et tiedät jotain, tiedätkö ettet tiedät sitä?

  Jos tiedät jotain, onko asia totta?
- Systemaattinen (Kripke/mahdollisten maailmojen) semantiikkaan perustuva lähestymistapa.

2. Esimerkki tietämyslogiikasta: mutaiset lapset

- Kaksi lasta, joilla kummallakin mutainen otsa.
- Lapset näkevät toisensa.
- Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat "en tiedä".
- Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"?
- Molemmat vastaavat: "tiedän otsani olevan mutainen".

Formalisointi: Lapset a ja b.

A: a:lla mutainen otsa / B: b:lla mutainen otsa

K_aB: a tietää, että b:lla on mutainen otsa.

Äiti sanoo: "ainakin toisella on mutainen otsa".

$A \vee B$

$K_a(A \vee B)$

$K_b(A \vee B)$

$$K_aK_b(A \vee B) \tag{1}$$

Lapset näkevät toisensa.

$$K_a(K_bA \vee K_b\neg A) \tag{2}$$

Äiti kysyy: "tiedättekö, onko otsanne mutainen vai ei"? Molemmat vastaavat "en tiedä".

$$K_a\neg K_bB \tag{3}$$

Lauseista 1–3 seuraa K_aA.

Millä perusteella?

3. Semanttinen tarkastelu

Miten esitetään tietämistä ja ei-tietämistä?

- Lähtökohdaksi otetaan joukko *mahdollisia maailmoja* (lauselogiikan malleja).
- Agentti a tietää lauseen P (merkitään K_aP) joss P on tosi kaikissa agentin a mahdollisina pitämissä maailmoissa.

  Esimerkki. Olkoon agentin a mahdollisten maailmojen joukko $\{\{P,Q\},\{Q\}\}$. Tällöin K_aQ on tosi, mutta K_aP ei ole.
- Kussakin mahdollisessa maailmassa s agentilla a on joukko agentin a kannalta samanarvoisia mahdollisia maailmoja.

☞ Mahdollisten maailmojen luokka jakaantuu agentin a kannalta kokoelmaksi erillisiä joukkoja mahdollisia maailmoja.

Mallien analyysi

Osoitetaan, että K_aA *seuraa loogisesti* lauseista 1–3, t.s. että jokaisessa tietämysmallin maailmassa, jossa lauseet 1–3 ovat totta, on K_aA totta.

- Olkoon S jokin agentin a kannalta mahdollisten maailmojen joukko ja s eräs joukon S mahdollisista maailmoista.
- Joukko S jakaantuu erillisiin joukkoihin $T_1, T_2, \ldots$ agentin b kannalta mahdollisia maailmoja.

Lause (2) $K_a(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi s:ssä.

$\Longrightarrow$ $(K_bA \vee K_b\neg A)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$ pätee
joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
A on epätosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

Mallien analyysi (jatkuu)

Lause (1) $K_aK_b(A \vee B)$ tosi s:ssä.

$\Longrightarrow$ $K_b(A \vee B)$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$ pätee
$A \vee B$ on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$ pätee
joko A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa tai
B on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

Huom. Niissä joukoissa T_i, joissa A on aina tosi, B voi kuitenkin olla epätosi. Esimerkkinä mahdollinen maailma $s = \{A\}$ ja $S = \{s\} = T_i$, joka itse asiassa muodostaa lauseiden 1–3 tietämysmallin.

Mallien analyysi (jatkuu)

Lause (3) $K_a\neg K_bB$ tosi s:ssä.

$\Longrightarrow$ Siis $\neg K_bB$ tosi kaikissa S:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$ pätee
B on epätosi jossain T_i:n maailmassa.

$\Longrightarrow$ Kaikille $i = 1, 2, \ldots$ pätee
A on tosi kaikissa T_i:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ A on tosi kaikissa S:n maailmoissa.

$\Longrightarrow$ K_aA tosi s:ssä.

Huom. Fittingin suorittama analyysi ei yleisty tapaukseen, missä lauseisiin lisätään perustellusti K_aB (koska a näkee b:n otsan).

4. Syntaktinen tarkastelu

Mitä tietämiseen liittyviä periaatteita tarvitaan?

- **Propositionaalinen päättely:** tautologiat + MP:

$$\frac{P, \quad P \rightarrow Q}{Q}$$

- **Distributiivisuusaksiooma:**

$$K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_aP \rightarrow K_aQ)$$

- **N-sääntö:**

$$\frac{P}{K_aP}$$

- **R-sääntö:**

$$\frac{P \rightarrow Q}{K_aP \rightarrow K_aQ}$$

Huom! Kysymyksessä on johdettu sääntö:

1.	$P \rightarrow Q$	
2.	$K_a(P \rightarrow Q)$	[N, 1]
3.	$K_a(P \rightarrow Q) \rightarrow (K_aP \rightarrow K_aQ)$	[Distr]
4.	$(K_aP \rightarrow K_aQ)$	[MP, 2,3]

- **T-aksiooma:**

$$K_aP \rightarrow P$$

- Johdetaan lause K_aA lauseista 1–3 lähtien käyttämällä edellä annettuja tietämiseen liittyviä periaatteita.

Syntaktinen todistus

1.	$K_aK_b(\neg A \rightarrow B)$	[P1]
2.	$K_a(\neg K_b\neg A \rightarrow K_bA)$	[P2]
3.	$K_a\neg K_bB$	[P3]
4.	$K_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow (K_b\neg A \rightarrow K_bB)$	[Distr]
5.	$K_aK_b(\neg A \rightarrow B) \rightarrow K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB)$	[R, 4]
6.	$K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB)$	[MP, 1, 5]
7.	$(K_b\neg A \rightarrow K_bB) \rightarrow (\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$	[Taut]
8.	$K_a(K_b\neg A \rightarrow K_bB) \rightarrow K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$	[R, 7]
9.	$K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A)$	[MP, 6, 8]
10.	$K_a(\neg K_bB \rightarrow \neg K_b\neg A) \rightarrow (K_a\neg K_bB \rightarrow K_a\neg K_b\neg A)$	[Distr]
11.	$K_a\neg K_bB \rightarrow K_a\neg K_b\neg A$	[MP, 9, 10]
12.	$K_a\neg K_b\neg A$	[MP, 3, 11]
13.	$K_a(\neg K_b\neg A \rightarrow K_bA) \rightarrow (K_a\neg K_b\neg A \rightarrow K_aK_bA)$	[Distr]
14.	$K_a\neg K_b\neg A \rightarrow K_aK_bA$	[MP, 2, 13]
15.	K_aK_bA	[MP, 12, 14]
16.	$K_bA \rightarrow A$	[T]
17.	$K_aK_bA \rightarrow K_aA$	[R, 16]
18.	K_aA	[MP, 15, 17]