Alijärjestelmän mittaus ja muita epätäydellisiä mittauksia

Loepp & Wootters, Protecting Information, luvut 2.4-2.5

Mikko Malinen

”Alijärjestelmän mittaus ja muita epätäydellisiä mittauksia”

Mitä otsikko takoittaa?

Alijärjestelmän mittaus: Useamman kvantin järjestelmästä mitataan vain sen kvanttien osajoukon tila.

Epätäydellinen mittaus: Useamman kvantin järjestelmästä mitataan vain osa.

Esimerkki:

- alijärjestelmän mittaus
- myös muita epätäydellisia mittauksia olemassa

Aluksi käsitellään alijärjestelmän mittausta.

Tarkastellaan yleisintä fotoniparin polarisaatiotilaa:

$$|s\rangle = a\,|{\leftrightarrow}{\leftrightarrow}\rangle + b\,|{\leftrightarrow}{\updownarrow}\rangle + c\,|{\updownarrow}{\leftrightarrow}\rangle + d\,|{\updownarrow}{\updownarrow}\rangle,$$

joka voi olla lomittunut tai ei. Halutaan tehdä mittaus $M = (|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle)$ ensimmäiselle fotonille ja jättää toinen fotoni mittaamatta. Mittauksen vaikutuksen selvittämiseksi on hyödyllistä kirjoittaa tila

$$|s\rangle = |\leftrightarrow\rangle \otimes (a|\leftrightarrow\rangle + b|\updownarrow\rangle) + |\updownarrow\rangle \otimes (c|\leftrightarrow\rangle + d|\updownarrow\rangle),$$

mikä on muotoa

$$|s\rangle = |\leftrightarrow\rangle \otimes |v\rangle + |\updownarrow\rangle \otimes |w\rangle,$$

missä $|v\rangle$ ja $|w\rangle$ ovat *normalisoimattomia* vektoreita assosioituina toiseen fotoniin.

Kun tehdään mittaus M ensimmäiselle photonille, mitkä ovat tulosten $|\leftrightarrow\rangle$ ja $|\updownarrow\rangle$ todennäköisyydet?

Tila oli muotoa

$$|s\rangle = |\leftrightarrow\rangle \otimes |v\rangle + |\updownarrow\rangle \otimes |w\rangle.$$

Tulosten todennäköisyydet ovat $\langle v|v\rangle$ ja $\langle w|w\rangle$.
Entä mitkä ovat fotonien lopputilat? Jos ensimmäisestä fotonista tulee tulos $|\leftrightarrow\rangle$, sen lopputila on $|\leftrightarrow\rangle$ ja toisen fotonin lopputila on verrannollinen $|v\rangle$:hen.

Sääntö alijärjestelmien mittaukselle

Tarkastellaan järjestelmää AB joka koostuu kahdesta osasta A ja B ja oletetaan että AB kokonaisuutena on tilassa $|s\rangle$. Osaa A mitataan nyt mittauksella $(|m_1\rangle, ..., |m_N\rangle)$, missä N on osan A dimensio. Voidaan osoittaa, että tila $|s\rangle$ voidaan aina kirjoittaa muodossa

$$|s\rangle = |m_1\rangle \otimes |v_1\rangle + ... + |m_N\rangle \otimes |v_N\rangle,$$

missä $|v_1\rangle, ..., |v_N\rangle$ ovat normalisoimattomia osaan B assosioituja vektoreita

- Tuloksen $|m_i\rangle$ todennäköisyys on $p_i = \langle v_i|v_i\rangle$.
- Jos i. tulos tapahtuu, osan A lopputila on $|m_i\rangle$ ja osan B lopputila on $|v_i\rangle/\sqrt{\langle v_i|v_i\rangle}$.

Esimerkki

Fotonipari on tilassa

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\updownarrow\rangle). \quad (1)$$

Tehdään ensimmäiselle fotonille mittaus

$$M = (|m_1\rangle, |m_2\rangle) = (\frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\rangle - |\updownarrow\rangle)).$$

(i) Mikä on tuloksen $|m_1\rangle$ todennäköisyys?

(ii) Jos tulos on $|m_1\rangle$, niin mikä on toisen fotonin lopputila?

Vastaukset: Vastataksemme haluamme ilmaista tilan $|s\rangle$ muodossa

$$|s\rangle = |m_1\rangle \otimes |v_1\rangle + |m_2\rangle \otimes |v_2\rangle.$$

Eli haluamme, että

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle) \otimes |v_1\rangle + (|\leftrightarrow\rangle - |\updownarrow\rangle) \otimes |v_2\rangle].$$

Jokainen $|v_i\rangle$ voidaan kirjoittaa $|v_i\rangle = a_i|\leftrightarrow\rangle + b_i|\updownarrow\rangle$, joten saadaan

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[(|\leftrightarrow\rangle+|\updownarrow\rangle)\otimes(a_1|\leftrightarrow\rangle+b_1|\updownarrow\rangle)+(|\leftrightarrow\rangle-|\updownarrow\rangle)\otimes(a_2|\leftrightarrow\rangle+b_2|\updownarrow\rangle)]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[(a_1+a_2)|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle+(b_1+b_2)|\leftrightarrow\updownarrow\rangle+(a_1-a_2)|\updownarrow\leftrightarrow\rangle+(b_1-b_2)|\updownarrow\updownarrow\rangle].$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (1) nähdään, että täytyy olla $a_1 + a_2 = 1, b_1 + b_2 = 0, a_1 - a_2 = 0$, ja $b_1 - b_2 = 1$. Ainoa ratkaisu on $a_1 = a_2 = b_1 = 1/2$ ja $b_2 = -1/2$. Täten

$$|v_1\rangle = \frac{1}{2}(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle) \quad \text{ja} \quad |v_2\rangle = \frac{1}{2}(|\leftrightarrow\rangle - |\updownarrow\rangle).$$

Nyt kysymyksiin voidaan vastata. (i) Tuloksen $|m_1\rangle$ todennäköisyys on $\langle v_1|v_1\rangle = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$. (ii) Jos tulos $|m_1\rangle$ tapahtuu, toisen fotonin lopputila on $|v_1\rangle/\sqrt{\langle v_1|v_1\rangle} = (1/\sqrt{2})(|\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\rangle)$.

Yhden fotonin mittaus vaikuttaa toisen fotonin tilaan. Lisäksi, toisen fotonin lopputila riippuu *valinnasta*, minkä mittauksen teemme ensimmäiselle fotonille. Jos Alice seisoo lähellä ensimmäistä fotonia ja Bob seisoo lähellä toista fotonia, voisiko Alice lähettää välittömän signaalin Bobille *valitsemalla* mittauksen?

Vastaus: Alice voi valita minkä mittuksen tekee, mutta ei voi vaikuttaa mittauksen tulokseen. Voidaan osoittaa, että tämä estää häntä käyttämästä fotonin lomittuneisuutta lähettääkseen signaalin Bobille.

Standardikanta $(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle, |\leftrightarrow\updownarrow\rangle, |\updownarrow\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\updownarrow\rangle)$ esittää tiettyä täydellistä mittausta fotoniparille. Mutta oletetaan, että haluamme tehdä vain mittauksen $(|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle)$ ensimmäiselle fotonille. Täytyy pystyä erottelemaan kaksi ensimmäistä kantaelementtiä kahdesta viimeisestä. Tässä tulevat apuun *projektio-operaattorit*. Tilan kertominen matriisilla

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

saa aikaan kahden fotonin tilan projisoinnin aliavaruuteen, jonka virittävät kaksi ensimmäistä kantavektoria.

Vastaavasti tilan kertominen matriisilla

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

saa aikaan kahden fotonin tilan projisoinnin aliavaruuteen, jonka virittävät kaksi jälkimmäistä kantavektoria.

Määritelmä. N:n dimension vektoriavaruuteen vaikuttava *projektio-operaattori* P on $N \times N$ -matriisi seuraavilla ominaisuuksilla: (i) $P^{\dagger} = P$, (ii) $P^2 = P$.

Esimerkki. Olkoon $|s\rangle$ tilavektori N-ulotteisessa tila-avaruudessa. Matriisi $P = |s\rangle\langle s|$ on projektio-operaattori joka projisoi $|s\rangle$:n virittämään aliavaruuteen (ks. perustelu kirja s.98).

Esimerkki. Olkoot $|s^{(1)}\rangle$ ja $|s^{(2)}\rangle$ kaksi ortogonaalista tilaa N-ulotteisessa tila-avaruudessa. Yhdessä ne virittävät kaksiulotteisen aliavaruuden. Operaattori, joka projisoi tähän aliavaruuteen voidaan kirjoittaa $P = |s^{(1)}\rangle\langle s^{(1)}| + |s^{(2)}\rangle\langle s^{(2)}|$.

Yleiset kvanttimekaaniset säännöt epätäydellisille mittauksille

Järjestelmän tila-avaruus mielivaltaisen ulotteinen.

1. Mittaus esitetään projektio-operaattoreina $M = (P_1, ..., P_n)$ niin että $\sum_i P_i = I$, identiteetti-operaattori.

2. Jos järjestelmän alkutila on $|s\rangle$ ja mittaus M suoritetaan, niin i. tuloksen todennäköisyys on

$$p_i = \langle s|P_i|s\rangle.$$

3. Jos alkutila on $|s\rangle$ ja i. tulos tapahtuu, systeemin lopputila on

$$|s_i\rangle = \frac{P_i|s\rangle}{\sqrt{\langle s|P_i|s\rangle}}.$$

Esimerkki Fotonipari on alussa tilassa $|s\rangle = (1/\sqrt{2})(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\updownarrow\rangle)$. Tehdään ensimmäiselle fotonille mittaus $(|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle)$. Mitkä ovat kahden tuloksen todennäköisyydet, ja kullekin tulokselle, mikä on fotoniparin lopputila?

Projektio-operaattorit P_1 ja P_2 kuten aikaisemmassa johdatuksessa. Säännön mukaan ensimmäisen tuloksen todennäköisyys on

$$p_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.$$

Vastaavasti toisen tuloksen todennäköisyys on $1/2$.

Jos ensimmäinen tulos tapahtuu, niin säännön mukaan parin lopputila on

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle.$$

Siis mittaus ei vain jätä mitattua fotonia tilaan $|\leftrightarrow\rangle$, vaan jättää myös toisen fotonin samaan tilaan.

Esimerkki. Tarkastellaan seuraavaa epätäydellistä mittausta fotoniparille:

$$P_1 = |\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow\leftrightarrow| + |\updownarrow\updownarrow\rangle\langle\updownarrow\updownarrow|$$

$$P_2 = |\leftrightarrow\updownarrow\rangle\langle\leftrightarrow\updownarrow| + |\updownarrow\leftrightarrow\rangle\langle\updownarrow\leftrightarrow|$$

Mittaus kysyy onko kahdella fotonilla *sama* polarisaatio vai *vastakkaiset* polarisaatiot ilman että kultakin fotonilta kysyttäisiin sen oma polarisaatio.

Olkoon tila $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\updownarrow\rangle)$ eli sama mitä käytettiin aikaisemmissa esimerkeissä.

Mittauksen tulosten todennäköisyydet ovat

$$p_1 = \langle s|P_1|s\rangle = \frac{1}{2}(\langle\leftrightarrow\leftrightarrow| + \langle\updownarrow\updownarrow|)(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow\leftrightarrow| + |\updownarrow\updownarrow\rangle\langle\updownarrow\updownarrow|)$$
$$\times(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\updownarrow\rangle) = 1$$
$$p_1 = \langle s|P_2|s\rangle = \frac{1}{2}(\langle\leftrightarrow\leftrightarrow| + \langle\updownarrow\updownarrow|)(|\leftrightarrow\updownarrow\rangle\langle\leftrightarrow\updownarrow| + |\updownarrow\leftrightarrow\rangle\langle\updownarrow\leftrightarrow|)$$
$$\times(|\leftrightarrow\leftrightarrow\rangle + |\updownarrow\updownarrow\rangle) = 0$$

Ensimmäinen tulos siis tapahtuu.

...ensimmäinen tulos siis tapahtuu, ja fotonipari säännön mukaan jää tilaan

$$|s_1\rangle = \frac{P_1|s\rangle}{\sqrt{\langle s|P_1|s\rangle}} = |s\rangle.$$

Eli, mittaus ei ole muuttanut tilaa. Jos kunkin yksittäisen fotonin polarisaatiot olisi mitattu, se olisi muuttanut niiden tilaa. Tekemällä tämänkaltainen epätäydellinen mittaus, voidaan saada tietoa tilasta vaikuttamatta tilaan.

Yhteenveto

1. Lomittuneissa järjestelmissä alijärjestelmän mittaus vaikuttaa myös järjestelmän toisen osan tilaan.

2. Voidaan tehdä myös epätäydellisiä mittauksia joissa systeemin tila ei muutu.