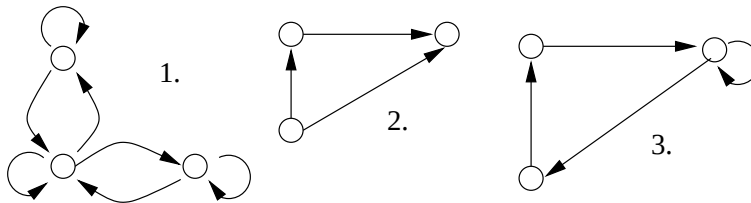


Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 10.5

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, jos $R(x,y)$ on tosi, silloin kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x,x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x,x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$) tarkoittaa sitä, että aina kun solmusta x on kaari solmuun y , graafissa on myös kaari y :stä x :ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y , pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y . Kuvan graafeista ainoastaan keskimäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x,y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y :n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y :n kanssa), $V(x,y)$ (y on x :n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x :n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x,y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

Tehtävä 10.7

- a) Olkoon $\mathcal{S}$ siten että $U = \{1, 2\}$, ja $P^{\mathcal{S}} = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x, y)$ pätee (kummallekin alkioille 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x, y)$ ei päde koska ei ole predikaatin tulkinnassa ei ole sellaista alkioita 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.
- b) Olkoon $\mathcal{S}$, siten että $U = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{S}} = \{1\}$, $Q^{\mathcal{S}} = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.
- c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat argumentit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä oleva osuus olla tosi.

Olkoon $\mathcal{S}$ siten että $U = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{S}} = \emptyset$, $R^{\mathcal{S}} = \{1\}$. Nyt $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$ on tosi, koska sen vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukko-relaatiota. Ensimmäisessä tapauksessa P :n tulkinnan tulisi olla R :n tulkinnan osajoukko ja toisessa R :n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P :n tulkinnaksi.

Tehtävä 11.1

Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.

- Negaatiot sisään, kvanttorit ulos.
- Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$\begin{aligned}
& \forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow \forall z Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee \forall x Q(x, y)) \\
& \equiv \forall y(\neg \exists x P(x, y) \vee \forall z Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee \forall x Q(x, y)) \\
& \equiv \forall y(\forall x \neg P(x, y) \vee \forall z Q(y, z)) \wedge \exists y(\forall x R(x, y) \vee \forall x Q(x, y)) \\
& \equiv \exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x, y) \vee \forall z Q(y, z)) \wedge (\forall x R(x, y_1) \vee \forall x Q(x, y_1))) \\
& \equiv \exists y_1 \forall y_2 ((\forall x \neg P(x, y_2) \vee \forall z Q(y_2, z)) \wedge (\forall x R(x, y_1) \vee \forall x Q(x, y_1))) \\
& \equiv \exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3 ((\neg P(x_1, y_2) \vee Q(y_2, z)) \wedge (R(x_2, y_1) \vee Q(x_3, y_1)))
\end{aligned}$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on konjunkttiivisessa normaalimuodossa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolem-funktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3 ((\neg P(x_1, y_2) \vee Q(y_2, z)) \wedge (R(x_2, c) \vee Q(x_3, c)))$$

c)

$$\begin{aligned}
& \forall x \exists y Q(x, y) \vee (\exists x \forall y P(x, y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x, y)) \\
& \equiv \forall x \exists y Q(x, y) \vee (\exists x \forall y P(x, y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x, y)) \\
& \equiv \forall x \exists y Q(x, y) \vee \exists x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (P(x_1, y_1) \wedge \neg P(x_2, y_2)) \\
& \equiv \exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (Q(x_3, y_3) \vee (P(x_1, y_1) \wedge \neg P(x_2, y_2)))
\end{aligned}$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunkttiiviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 ((Q(x_3, y_3) \vee P(x_1, y_1)) \wedge (Q(x_3, y_3) \vee \neg P(x_2, y_2)))$$

Skolemoinnissa x_1 korvataan vakiolla ja y_3 lausutaan x_3 :n funktiona.

$$\forall x_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 ((Q(x_3, f(x_3)) \vee P(c, y_1)) \wedge (Q(x_3, f(x_3)) \vee \neg P(x_2, y_2)))$$

Tehtävä 11.2

Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuutosääntöjä.

a)

$$\begin{aligned}\forall x \phi(x) \rightarrow \psi \\ &\equiv \neg \forall x \phi(x) \vee \psi \\ &\equiv \exists x \neg \phi(x) \vee \psi \\ &\equiv \exists x_1 (\neg \phi(x_1) \vee \psi) \\ &\equiv \exists x_1 (\phi(x_1) \rightarrow \psi)\end{aligned}$$

b) Vastaavasti, $\exists x \phi(x) \rightarrow \psi \equiv \forall x_1 (\phi(x_1) \rightarrow \psi)$.

c)

$$\begin{aligned}\phi \rightarrow \forall x \psi(x) \\ &\equiv \neg \phi \vee \forall x \psi(x) \\ &\equiv \forall x_1 (\neg \phi \vee \psi(x_1)) \\ &\equiv \forall x_1 (\phi \rightarrow \psi(x_1))\end{aligned}$$

d) Vastaavasti, $\phi \rightarrow \exists x \psi(x) \equiv \exists x_1 (\phi \rightarrow \psi(x_1))$.

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

Tehtävä 11.4

a) Lause $\neg \exists x ((P(x) \rightarrow P(a)) \wedge (P(x) \rightarrow P(b)))$:

Eliminoidaan implikaatiot: $\neg \exists x ((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$.

Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:

$$\forall x \neg ((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b))).$$

Viedään negatiot lausekkeiden sisään:

$$\forall x ((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b))).$$

Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x (P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$.

Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$.

Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\}, \{\neg P(a), \neg P(b)\}\}$.

b) Lause $\forall y \exists x P(x, y)$:

Skolemointi: $\forall y P(f(y), y)$.

Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(f(y), y)$.

Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y), y)\}\}$.

c) Lause $\neg\forall y\exists xG(x,y)$:

Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y\neg\exists xG(x,y)$.

Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y\forall x\neg G(x,y)$

Skolemointi: $\forall x\neg G(x,c)$.

Jätetään universaalikvanttorit pois: $\neg G(x,c)$.

Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x,c)\}\}$.

d) Lause $\exists x\forall y\exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \rightarrow G(x,y))$:

Eliminoidaan implikaatio: $\exists x\forall y\exists z(\neg(P(x,z) \vee P(z,y)) \vee G(x,y))$.

Viedään negaatiot lausekkeen sisään:

$\exists x\forall y\exists z((\neg P(x,z) \wedge \neg P(z,y)) \vee G(x,y))$.

Viedään $G(x,y)$ lausekkeen sisään:

$\exists x\forall y\exists z((\neg P(x,z) \vee G(x,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(x,y)))$.

Skolemointi: $\forall y\exists z((\neg P(c,z) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(c,y)))$.

Skolemointi: $\forall y((\neg P(c, f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y)))$.

Jätetään universaalikvanttorit pois:

$(\neg P(c, f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y))$.

Muodostetaan klausuuliesitys:

$\{\{\neg P(c, f(y)), G(c,y)\}, \{\neg P(f(y),y), G(c,y)\}\}$.