

Ratkaisuja demotehtäviin

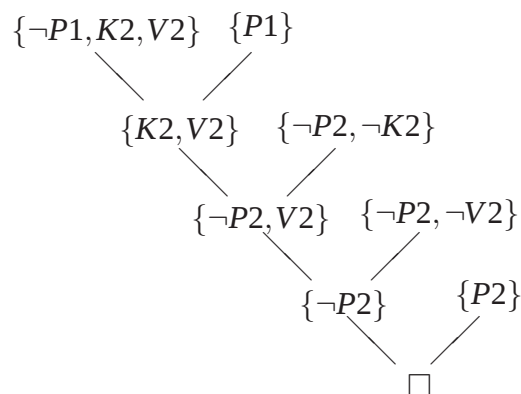
Tehtävä 7.8

Muunnetaan lauseet konjunkttiiviseen normaalimuotoon ja klausuuleiksi. Taulukossa on viimeisenä todistettavan kaavan negatio

$$\neg(\neg(P1 \wedge P2)) \equiv P1 \wedge P2.$$

$Pi \vee Ki \vee Vi$	$\{Pi, Ki, Vi\}$
$Pi \rightarrow \neg Ki \wedge \neg Vi \equiv \neg Pi \vee (\neg Ki \wedge \neg Vi)$ $\equiv (\neg Pi \vee \neg Ki) \wedge (\neg Pi \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Pi, \neg Vi\}$
$Ki \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Vi \equiv (\neg Ki \vee \neg Pi) \wedge (\neg Ki \vee \neg Vi)$	$\{\neg Pi, \neg Ki\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$Vi \rightarrow \neg Pi \wedge \neg Ki \equiv (\neg Vi \vee \neg Pi) \wedge (\neg Vi \vee \neg Ki)$	$\{\neg Pi, \neg Vi\}, \{\neg Ki, \neg Vi\}$
$\neg(V1 \wedge V2) \equiv \neg V1 \vee \neg V2$	$\{\neg V1, \neg V2\}$
$P1 \rightarrow (K2 \vee V2) \equiv \neg P1 \vee K2 \vee V2$	$\{\neg P1, K2, V2\}$
$P2 \rightarrow (K1 \vee V1) \equiv \neg P2 \vee K1 \vee V1$	$\{\neg P2, K1, V1\}$
$P1 \wedge P2$	$\{P1\}, \{P2\}$

Osoitetaan, että taulukossa annettujen klausuulien joukko on toteutumaton (tyhjä klausuuli $\square$ tarkoittaa ristiriitaa), mikä tarkoittaa, että lause $\neg(P1 \wedge P2)$ on johdettavissa muista klausuuleista:



Tehtävä 7.9

Mallinnetaan kemialliset reaktiot implikaatioiksi, jotka muutetaan sitten klausuulimuotoon.

(1)

$$\begin{aligned}\text{MgO} + \text{H}_2 &\rightarrow \text{Mg} + \text{H}_2\text{O} \\ \Rightarrow \text{MgO} \wedge \text{H}_2 &\rightarrow \text{Mg} \wedge \text{H}_2\text{O} \\ \Rightarrow \neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee (\text{Mg} \wedge \text{H}_2\text{O}) \\ \Rightarrow (\neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee \text{Mg}) \wedge (\neg \text{MgO} \vee \neg \text{H}_2 \vee \text{H}_2\text{O})\end{aligned}$$

Saadaan kaksi klausuulia: $\{\neg \text{MgO}, \neg \text{H}_2, \text{Mg}\}$ sekä $\{\neg \text{MgO}, \neg \text{H}_2, \text{H}_2\text{O}\}$

(2)

$$\begin{aligned}\text{C} + \text{O}_2 &\rightarrow \text{CO}_2 \\ \Rightarrow \text{C} \wedge \text{O}_2 &\rightarrow \text{CO}_2 \\ \Rightarrow \neg \text{C} \vee \neg \text{O}_2 \vee \text{CO}_2 \\ \Rightarrow \{\neg \text{C}, \neg \text{O}_2, \text{CO}_2\}\end{aligned}$$

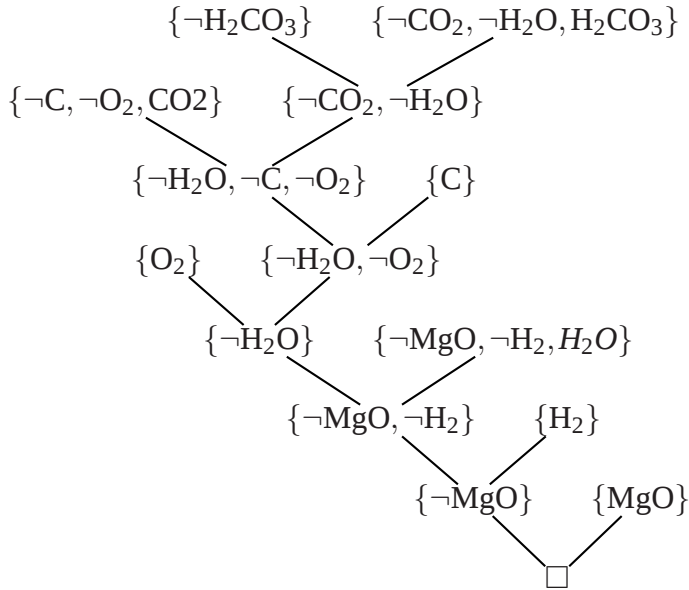
(3)

$$\begin{aligned}\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} &\rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \Rightarrow \text{CO}_2 \wedge \text{H}_2\text{O} &\rightarrow \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \Rightarrow \neg \text{CO}_2 \vee \neg \text{H}_2\text{O} \vee \text{H}_2\text{CO}_3 \\ \Rightarrow \{\neg \text{CO}_2, \neg \text{H}_2\text{O}, \text{H}_2\text{CO}_3\}\end{aligned}$$

Lisäksi lähtöaineista saadaan neljän klausuulin joukko:

$$\begin{aligned}\text{MgO} \wedge \text{H}_2 \wedge \text{O}_2 \wedge \text{C} \\ \Rightarrow \{\text{MgO}\}, \{\text{H}_2\}, \{\text{O}_2\}\{\text{C}\}\end{aligned}$$

Merkitään ylläolevaa klausuulijoukkoa Σ :lla. Nyt halutaan todistaa, että $\Sigma \models \text{H}_2\text{CO}_3$. Todistus tehdään osoittamalla, että $\Sigma \cup \{\neg \text{H}_2\text{CO}_3\}$ on toteutumaton:



Tehtävä 8.1

Esitetty ratkaisu on C. Papadimitrioun kirjasta “Computational Complexity”. Deterministinen Turingin kone on nelikko $\langle A, S, s_0, t \rangle$, missä

- A on aakkosto,
- S on tilajoukko,
- $t : S \times A \rightarrow S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$ tilansiirtofunktio ja
- $s_0 \in S$ alkutila.

Binääriluvun seuraajan laskevalle koneelle $S = \{s\}$, $A = \{0, 1\}$, $s_0 = s$ ja siirtofunktio on luettavissa seuraavasta taulukosta:

$p \in S$	$\sigma \in A$	$t(p, \sigma)$
s	0	$(h, 1, -)$
s	1	$(s, 0, \rightarrow)$
s	$\sqcup$	$(h, 1, -)$
s	$\triangleright$	$(s, \triangleright, \rightarrow)$

Syötteellä 1101 kone laskee seuraavasti: $(s, \triangleright, 1101) \xrightarrow{M} (s, \triangleright 0, 101)$

$\xrightarrow{M} (s, \triangleright 00, 01) \xrightarrow{M} (h, \triangleright 001, 1)$. Se siis siirtyy oikealle muuttaen ykkösiä nolliksi kunnes se kohtaa ensimmäisen nollan, jonka se muuttaa ykköseksi ja pysähtyy. Jos luvun kaikki numerot ovat ykkösiä, niin ne muutetaan nolliksi, kunnes kohdataan tyhjä merkki nauhan lopussa, jonka paikalle kirjoitetaan ykkönen ja kone pysähtyy.