

Ratkaisuja demotehtäviin

Tehtävä 1.1

- a) Kyllä, atominen lause.
- b) Ei, ei voida johtaa lauseenmuodostussäännöillä. Ei myöskään sisällä parillista määrää sulkuja (kts. tehtävä 5).
- c) Kyllä, vastaukseksi voi esimerkiksi antaa jäsennyspuun, josta muodostussääntöjen soveltaminen käy ilmi.
- d) Ei, luonnollista kieltä.

Tehtävä 1.3

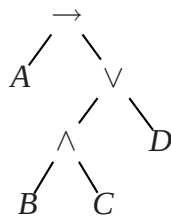
Sovelletaan sopimuksia konnektiivien vahvuusjärjestyksestä:

- a) $A \rightarrow (B \wedge C) \vee D$
- b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- c) $(A \wedge (B \vee C)) \vee (A \wedge (C \vee D))$
- d) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (B \rightarrow C) \wedge A$
- e) $\neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

Tehtävä 1.4

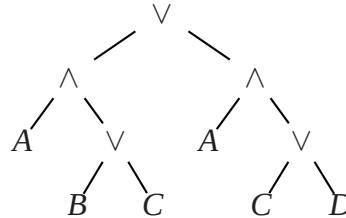
Muoto määräytyy uloimmasta konnektiivistä:

- a) Implikaatio.



b) Implikaatio.

c) Disjunktio.



d) Ekvivalenssi.

e) Implikaatio.

Tehtävä 1.5

$\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow C)$, $\neg(\neg A \rightarrow B) \rightarrow C$, $\neg A$, $\neg B \rightarrow C$, $\neg(\neg A \rightarrow B)$,
 C , A , $\neg B$, $\neg A \rightarrow B$, B . Lisäksi lause on itse oma alilauseensa.

Tehtävä 1.6

Perustapaus: 0-alkioisella joukolla (olettaen $0 \in \mathbb{N}$) eli tyhjällä joukolla on yksi osajoukko, se itse. Lisäksi $2^0 = 1$.

Induktio-oletus: Väite pätee arvolla $n = k$, eli k -alkioisella joukolla on 2^k osajoukkoa.

Induktioaskel: Tarkastellaan joukkoa A , jossa on $k + 1$ alkioita. Valitaan joukosta mielivaltaisen alkio a . Joukon A osajoukot jakautuvat osajoukkojen, joissa a on mukana, joukkoon B ja osajoukkojen, joissa a ei ole mukana, joukkoon C . Joukko C on k -alkioisen joukon osajoukkojen joukko (pohdi miksi!). Induktio-oletuksen perusteella $|C| = 2^k$. Toisaalta, jokainen B :n alkio voidaan bijektiivisesti kuvata tietyksi C :n alkioiksi (poistamalla a). Pätevä siis $|B| = |C|$. Koska kukin A :n osajoukko kuuluu joko B :hen tai C :hen (mutta ei molempiin), on A :n osajoukkojen lukumäärä $|B| + |C| = 2^n + 2^n = 2 * 2^n = 2^{n+1}$. $\square$

Tehtävä 1.7

Todistetaan väite induktiolla lauseen sisältämien konnektiivien määrän suhteen.

Perustapaus: Lause, jossa ei ole yhtään konnektiivia on atomilause, ja se sisältää 0 sulkua (0 on parillinen luku).

Induktio-oletus: Lause, jossa on korkeintaan n konnektiivia, sisältää parillisen määrän sulkuja.

Induktio-askel: Tarkastellaan lausetta f , jossa on $n + 1$ konnektiivia. Lause f on muotoa $(\neg \alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ tai $(\alpha \leftrightarrow \beta)$. Nyt kussakin mahdollisessa

tapauksessa α ja β ovat lauseita, joissa on korkeintaan n konnektiivia. Induktiooletuksen mukaan α ja β sisältävät parillisen määrän sulkuja. Näin ollen lause f sisältää myös parillisen määrän sulkuja.