

Luento 9: Predikaattilogiikan semanttiset taulut

1. Taulusäännöt kvanttoreille
2. Tauluihin liittyvät määritelmät
3. Ohjeita todistusten laatimiseen
4. Systemaattinen taulu
5. Vastamallien muodostaminen

Universaaliset solmut

- Muotoa $T\forall x\phi(x)$ (tai vastaavasti $E\exists x\phi(x)$) oleva solmu tulee tarvittaessa hajottaa kaikille *muuttujattomille termeille* t .

$$\begin{array}{cc} T\forall x\phi(x) & E\exists x\phi(x) \\ | & | \\ T\phi(t) & E\phi(t) \end{array}$$

- Tällaisia solmuja ei välttämättä saada hajotetuksi äärellisellä askelmäärällä, jos muuttujattomia termejä t on ääretön määrä.

Esimerkki Vakiosymboleista c ja d ja funktiosymbolista $f \in \mathcal{F}_1$ voidaan muodostaa muuttujattomat termit

$$c, d, f(c), f(d), f(f(c)), f(f(d)), \dots$$

1. TAULUSÄÄNNÖT KVANTTOREILLE

- Muotoa $T\exists x\phi(x)$ (tai $E\forall x\phi(x)$) oleva *eksistentiaalinen* solmu tulee hajottaa *kertaalleen* käyttäen jotain *uutta vakiota* c .

$$\begin{array}{cc} T\exists x\phi(x) & E\forall x\phi(x) \\ | & | \\ T\phi(c) & E\phi(c) \end{array}$$

- Ainoastaan muuttujalla x voi olla vapaita esiintymiä kaavassa $\phi(x)$ eli kvantifioitujen kaavat $\exists x\phi(x)$ ja $\forall x\phi(x)$ ovat lauseita.

Määritelmä 12.1 Tarkastellaan semanttisen taulun polkua P juurisolmusta lehtisolmuun, jolla solmu $T\exists x\phi(x)$ / $E\forall x\phi(x)$ esiintyy ja jolle kyseinen solmu on tarkoitus hajottaa. Vakio c on *uusi* polulla P , mikäli se ei esiinny polulla P *hajottamishetkellä*.

2. TAULUIHIN LIITTYVÄT MÄÄRITELMÄT

- Rajaamme *toistaiseksi* yhtäsuuruuspredikaatin “=” tarkastelun ulkopuolelle välttääksemme yhtälöiden käsittelyn.
- Semanttisten taulujen määritelmä (4.2) säilyy ennallaan.
- Polun P solmujen *hajotusehtoja* joudutaan täydentämään
 - *eksistentiaalisten* solmujen $T\exists x\phi(x)$ ja $E\forall x\phi(x)$; sekä
 - *universaalisten* solmujen $T\forall x\phi(x)$ ja $E\exists x\phi(x)$ osalta.
- Polkuja ja kokonaista semanttista taulua koskevan *valmiuden* ja *ristiriitaisuuden* määritelmät säilyvät muuttumattomina.

Universaalisten solmujen hajotusehto

- Tarkastellaan semanttista taulua τ ja sen juurisolmusta johonkin lehtisolmuun johtavaa polkua P .
- Polun P universaaliset solmut $T\forall x\phi(x)$ ($E\exists x\phi(x)$) koskevat kaikkia universumin alkioita ja siksi ne tulee tarvittaessa hajottaa polulle P kaikkien muuttujattomien termien suhteen.
- Mikäli polulla P ei esiinny vakiosymboleita, universaaliset solmut tulee hajottaa ainakin kertaalleen jonkin vakion c suhteen.

Määritelmä 12.3 Polun P solmu $T\forall x\phi(x)$ (vastaavasti $E\exists x\phi(x)$) on *hajotettu* polulle P , jos ja vain jos polulla P esiintyy solmu $T\phi(t)$ (vastaavasti solmu $E\phi(t)$) kaikille muuttujattomille termeille t , jotka voidaan muodostaa polulla P esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista.

Loogiset päättelytehtävät

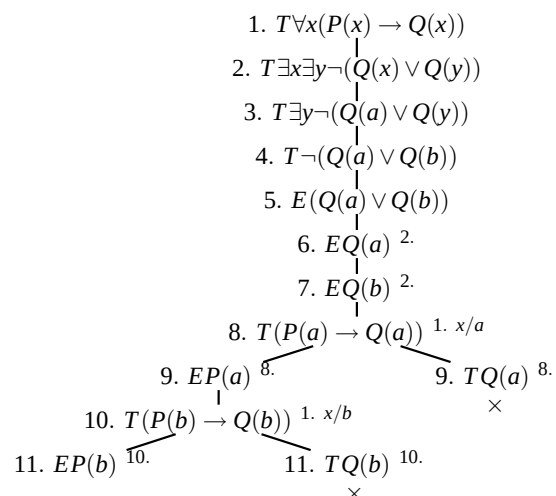
- Pätevyyttä ja loogista seuraavuutta tutkitaan predikaattilogiikan semanttisilla tauluilla aivan kuten lauselogiikankin tapauksessa.
- Jos lauseella ϕ on todistus, on ϕ *teoreema/todistuva* (merk. $\vdash \phi$).

Määritelmä 4.22 Taulu τ on lauseen ϕ *todistus*, joss taulun τ juurisolmuna on $E\phi$ ja τ on ristiriitainen (ja siten myös valmis).

Määritelmä 4.26 Lause ϕ on *johdettavissa* lausejoukosta $\Sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ (merk. $\Sigma \vdash \phi$), joss juurisolmusta $E(\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \phi)$ muodostettu valmis semanttinen taulu on ristiriitainen.

Väite $\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$ (virheettömyys ja täydellisyys).

Esimerkki 12.4 Lausejoukko $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \exists x\exists y\neg(Q(x) \vee Q(y))\}$ on toteutuva seuraavan valmiin semanttisen taulun perusteella:



3. OHJEITA TODISTUSTEN LAATIMISEEN

- Lauseen rakenne määrää edelleen, mitä taulusääntöä tulee käyttää!
- Solmujen hajottamisjärjestyksellä voi vaikuttaa taulun kokoon; taulua haarauttavien solmujen hajottamista pyritään viivästyttämään.
- Universaalisten solmujen taulusäännöissä esiintyvän termin t tilalle valitaan *hajottamishetkellä* (eikä myöhemmin) jokin vakio tai funktio- ja vakiosymboleista rakentuva muuttujaton termi.
- Valitsemalla muuttujattomat termit t sopivasti voidaan taulun valmistumista usein nopeuttaa olennaisesti.

Taulutodistusten erityispiirteitä (I)

Valitaan muuttujattomaksi termiksi t vakio, joka ei esiinny lauseissa.

Esimerkki 12.8 Osoitetaan $\{\forall xP(x)\} \vdash \exists xP(x)$.

1. $T \forall xP(x)$
 2. $E \exists xP(x)$
 3. $TP(c)^{1. x/c}$
 4. $EP(c)^{2. x/c}$
- ×

Huomio Tämä on perusteltua, koska universumissa U on aina vähintään yksi alkio $a \in U$, joka voidaan nimetä (eli $c^S = a$).

Taulutodistusten erityispiirteitä (III)

Muuttujien korvaaminen sopivilla muuttujattomilla termeillä.

Esimerkki 12.10 Osoitetaan, että

$$\{\forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)), P(a,b), P(b,c)\} \vdash P(a,c).$$

- Solmusta $T \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$ voidaan johtaa kvanttorisäännöillä 27 erilaista todeksi merkittyä implikaatiota.
- Ristiriidan johtamisen kannalta olennaisia ovat implikaatioista ne, joissa esiintyy atomisia lauseita $P(a,b)$, $P(b,c)$ ja $P(a,c)$.
- Esimerkin tapauksessa tämä johtaa ensimmäiseksi $x:n$, $y:n$ ja $z:n$ korvaamiseen vakoilla a , b , ja c (näin saatava implikaatio riittää).
- Kaikki muut implikaatit kasvattavat taulua tarpeettomasti.

Taulutodistusten erityispiirteitä (II)

Solmu $T \forall x\phi(x)$ (tai $E \exists x\phi(x)$) joudutaan hajottamaan useasti.

Esimerkki 12.9 Osoitetaan $\{\forall xP(x)\} \vdash P(a) \wedge P(b)$.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $T \forall xP(x)$ 2. $E(P(a) \wedge P(b))$ 3. $TP(a)^{1. x/a}$ 4. $TP(b)^{1. x/b}$ 5. $EP(a)^{2.}$ 5. $EP(b)^{2.}$ <p style="text-align: center;">×</p> | <ol style="list-style-type: none"> 1. $T \forall xP(x)$ 2. $E(P(a) \wedge P(b))$ 3. $EP(a)^{2.}$ 4. $TP(a)^{1. x/a}$ 3. $EP(b)^{2.}$ 4. $TP(b)^{1. x/b}$ <p style="text-align: center;">×</p> |
|---|---|

Taulutodistus kokonaisuudessaan

1. $T \forall x\forall y\forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$
 2. $TP(a,b)$
 3. $TP(b,c)$
 4. $EP(a,c)$
 5. $T \forall y\forall z(P(a,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(a,z))^{1. x/a}$
 6. $T \forall z(P(a,b) \wedge P(b,z) \rightarrow P(a,z))^{5. y/b}$
 7. $T(P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c))^{6. z/c}$
 8. $E(P(a,b) \wedge P(b,c))^{7.}$
 8. $TP(a,c)^{7.}$
 9. $EP(a,b)^{8.}$
 9. $EP(b,c)^{8.}$
- ×

Kvanttorisekvenssien käsittely

Jatkossa sallimme seuraavien johdettujen taulusääntöjen käytön kvanttorisekvenssien käsittelyssä:

$$\begin{array}{cc}
 T \forall x_1 \dots \forall x_n \phi(x_1, \dots, x_n) & E \exists x_1 \dots \exists x_n \phi(x_1, \dots, x_n) \\
 \downarrow & \downarrow \\
 T \phi(t_1, \dots, t_n) & E \phi(t_1, \dots, t_n) \\
 \\
 T \exists x_1 \dots \exists x_n \phi(x_1, \dots, x_n) & E \forall x_1 \dots \forall x_n \phi(x_1, \dots, x_n) \\
 \downarrow & \downarrow \\
 T \phi(c_1, \dots, c_n) & E \phi(c_1, \dots, c_n)
 \end{array}$$

Yllä $c_1, \dots, c_n$ ovat ao. taulusääntöjen edellyttämiä *uusia vakioita* ja vastaavasti $t_1, \dots, t_n$ ovat valittuja *muuttujattomia termejä*.

4. SYSTEMAATTINEN TAULU

Lauselogiikan keskeiset päättelyongelmat ovat *ratkeavia*:

- Voidaan laatia *deterministinen* Turing-kone T , joka *ratkaisee* pätevien lauseiden kielen $\text{VALID} = \{\phi \mid \forall \mathcal{A} \subseteq \text{At}(\phi) : \mathcal{A} \models \phi\}$:
 1. Jos $\phi \in \text{VALID}$, niin T pysähtyy hyväksyvään tilaan k.
 2. Jos $\phi \notin \text{VALID}$, niin T pysähtyy hylkävään tilaan e.
- Turing-koneen T noudattama algoritmi voi perustua esim. semanttisiin tauluihin tai resoluutioon.
- Myös looginen ekvivalenssi, looginen seuraavuus ja toteutuvuus ovat lauselogiikan tapauksessa ratkeavia ongelmia.

Taulutodistusten erityispiirteitä (IV)

Solmujen keskinäinen hajotusjärjestys voi olla ratkaisevassa roolissa.

Esimerkki 12.11 $\{\forall x P(x), \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)), Q(a)\} \vdash \forall x Q(x)$.

$$\begin{array}{l}
 1. T \forall x P(x) \\
 \downarrow \\
 2. T \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \\
 \downarrow \\
 3. T Q(a) \\
 \downarrow \\
 4. E \forall x Q(x) \\
 \downarrow \\
 5. E Q(c)^{4. \ x/c} \\
 \downarrow \\
 6. T P(c)^{1. \ x/c} \\
 \downarrow \\
 7. T (P(c) \rightarrow Q(c))^{2. \ x/c} \\
 \downarrow \\
 \begin{array}{cc}
 8. E P(c)^{7.} & 8. T Q(c)^{7.} \\
 \times & \times
 \end{array}
 \end{array}$$

Predikaattilogiikan puoliratkeavuus

- Päteviä lauseita vastaava kieli $\text{VALID} = \{\phi \mid \phi \text{ on lause ja } \models \phi\}$ on ainoastaan *hyväksyttävissä* deterministisellä Turing-koneella.
- Voidaan laatia *deterministinen* Turing-kone T seuraavasti:
 1. Jos $\phi \in \text{VALID}$, niin T pysähtyy hyväksyvään tilaan k.
 2. Jos $\phi \notin \text{VALID}$, niin T pysähtyy *joskus* hylkävään tilaan e ja *joskus* T ei pysähdy lainkaan.
- Tällainen algoritmi voi perustua esim. semanttisiin tauluihin.
- Jos juurisolmuun $E\phi$ perustuva taulu tehdään *systemaattisesti*, voidaan taata, että taulu tulee ristiriitaiseksi, mikäli $\models \phi$.

Systemaattisen taulun periaatteita

- Tuotetaan indeksoimalla riittävä määrä uusia vakioita $c_1, c_2, c_3, \dots$
- Tuotetaan tarpeen mukaan muuttujattomia termejä $t_1, t_2, t_3, \dots$, jotka rakentuvat $E\phi$:ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista sekä mahdollisesti käyttöön otetuista uusista vakioista $c_1, c_2, c_3, \dots$
- Sekvenssin $t_1, t_2, t_3, \dots$ on oltava *reilu*: jokainen em. symboleista rakentuva muuttujaton termi t esiintyy siinä jonain terminä t_i .
- *Hajotusten reiluus*: taataan, että taulun keskeneräisillä poluilla esiintyvät hajottamattomat solmut tulevat hajotusvuoroon (seuraavan kerran) äärellisen monen muun hajotuksen jälkeen.
- Universaalisia solmuja $T\forall x\psi(x)$ ja $E\exists x\psi(x)$ hajotetaan järjestyksessä käyttäen muuttujattomia termejä $t_1, t_2, t_3, \dots$

5. VASTAMALLIEN MUODOSTAMINEN

- Vastamallin (struktuuri) $\mathcal{S}$ muodostetaan jonkin ristiriidattoman polun *atomisia lauseita* koskevia totuusarvovaatimuksia $TP(t_1, \dots, t_n), EQ(s_1, \dots, s_m), \dots, j$ ne.
- Valitaan riittävän iso universumi U , jotta totuusarvovaatimuksissa esiintyvillä vakio- ja funktiosymboleille voidaan antaa tulkinnat.
- Valitaan predikaattien tulkinnat totuusarvovaatimusten mukaisesti:
 1. Jos $TP(t_1, \dots, t_n)$ on polulla, $\langle t_1^S, \dots, t_n^S \rangle \in P^S$.
 2. Jos $EQ(s_1, \dots, s_m)$ on polulla, $\langle s_1^S, \dots, s_m^S \rangle \notin Q^S$.
- Menettely on käyttökelpoinen erityisesti, jos *valmiin* semanttisen taulun ristiriidaton polku on *äärellinen*.

Universaaliset solmut

- Universaalisia solmuja ei välttämättä saada hajotetuksi äärellisellä askelmäärällä, jolloin valmis taulu muodostuu äärettömäksi.

Esimerkki Määritellään luonnollisten lukujen $>$ -relaatio. Olkoon $G(x, y) = "x > y"$ ja $s(x)$ luvun x seuraaja (eli $x + 1$):

$$\forall x G(s(x), x) \text{ ja } \forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow G(s(x), y)).$$

Kysely: onko $G(s(s(s(0))), s(0))$ määritelmän looginen seuraus?

Hajotetaan systemaattisesti semanttisen taulun solmuja

$$T\forall x G(s(x), x) \text{ ja } T\forall x \forall y (G(x, y) \rightarrow G(s(x), y))$$

käyttäen muuttujattomia termejä: $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \dots$ ■

Systemaattinen taulu voi tehdä turhaa työtä $\implies$ heuristiikka tarpeen!

Esimerkki

Haetaan vastamalli $\mathcal{S}$ lauseen $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ pätevyydelle:

$$\begin{array}{l} 1. E\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \\ \quad | \\ 2. E(P(c) \rightarrow Q(c)) \quad 1. x/c \\ \quad | \\ 3. T(P(c)) \quad 2. \\ \quad | \\ 4. E(Q(c)) \quad 2. \end{array}$$

1. Polulta saatavat totuusarvovaatimukset: $TP(c)$ ja $EQ(c)$.
2. Riittää, että universumiin $U = \{1\}$ otetaan yksi alkio s.e. $c^S = 1$.
3. Totuusarvovaatimusten nojalla: $1 \in P^S$ ja $1 \notin Q^S$.
4. Nämä vaatimukset toteutuvat valinnoilla $P^S = \{1\}$ ja $Q^S = \emptyset$.



TAVOITTEET

- Osaat muodostaa *valmiin* semanttisen taulun taulusääntöjä soveltamalla, kun juurisolmu(t) on annettu.
- Tunnet joitain periaatteita taulujen koon kasvun hillitsemiseksi.
- Tiedät, miten erilaiset loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa semanttisten taulujen avulla.
- Mikäli valmiiseen semanttiseen tauluun jää ei-ristiriitaisia polkuja, osaat muodostaa vastamallin atomisia lauseita koskevien totuusarvovaatimusten pohjalta.



PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan predikaattilogiikan kieltä $\mathcal{L}$, joka perustuu vakio- ja funktiosymbolien joukkoihin $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_n\}$ ja $\mathcal{F} = \emptyset$.

Oletetaan lisäksi, ettei universumissa U ole muita kuin vakioiden $c_1, \dots, c_n$ nimeämiä alkioita.

- Mieti, millä tapaa eksistentiaalisten ja universaalisten solmujen käsittelyä voidaan yksinkertaistaa näillä olettamuksilla.
- Onko näin syntyvä rajoitettu taulumenetelmä verrattavissa lauselogiikan semanttisten taulujen menetelmään?