

Luento 7: Predikaattilogiikan syntaksi ja semantiikka

1. Predikaattilogiikan aakkosto
2. Kielen määritelmä
3. Kaavojen muodostaminen
4. Kvanttoreihin liittyviä määritelmiä
5. Struktuurit
6. Totuusmääritelmä

1. PREDIKAATTILOGIIKAN AAKKOSTO

Predikaattilogiikan kielessä $\mathcal{L}$ käytetään seuraavia symboleja:

1. Muuttujasymbolit $\mathcal{V} = \{x, y, z, \dots\}$
2. Vakiosymbolit $\mathcal{C} = \{a, b, c, \dots\}$
3. Funktiot symbolit $\mathcal{F} = \{f, g, h, \dots\}$
4. Predikaattisymbolit $\mathcal{P} = \{=, P, Q, R, \dots\}$

Muut kaavojen muodostamisessa käytettävät symbolit:

- Lauselogiikan konnektiivit $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Kvanttorisymbolit $\exists$ (jollekin) ja $\forall$ (kaikille)
- Sulut “(”, “)” ja pilkku “,”

Motivaatio

Esimerkki 9.1 Lauselogiikalla laaditut kuvaukset ovat *joustamattomia*:

$A = “a \text{ on viallinen}”, B = “b \text{ on viallinen}”, C = “c \text{ on viallinen}”.$

“Kaikki ovat viallisia”. $A \wedge B \wedge C$ vs. $\forall x V(x)$

“Jokin on viallinen”. $A \vee B \vee C$ vs. $\exists x V(x)$

Esimerkki 9.2 Objektien välisten *suhteiden* kuvaaminen on hankalaa:

$C_d = “c \text{ on suurempi kuin } d”, D_e = “d \text{ on suurempi kuin } e”, \dots$

“Jos x on suurempi kuin y ja y on suurempi kuin z , niin x on suurempi kuin z ”.

$(C_d \wedge D_e \rightarrow C_e) \wedge (C_e \wedge E_d \rightarrow C_d) \wedge (D_e \wedge E_c \rightarrow D_c) \wedge \dots$

vs. $\forall x \forall y \forall z (S(x, y) \wedge S(y, z) \rightarrow S(x, z))$

Funktio- ja predikaattisymbolien paikkaluvut

- Jokaisella funktiosymbolilla $f \in \mathcal{F}$ on *paikkaluku* $n > 0$ (joka määrää f :n argumenttien lukumäärän).
- Vastaavasti predikaattisymboleilla $P \in \mathcal{P}$ on paikkaluvut $n \geq 0$.
- Määritellään paikkalukukohtaiset symbolijoukot:

$$\mathcal{F}_n = \{f \in \mathcal{F} \mid \text{symbolin } f \text{ paikkaluku on } n > 0\}$$

$$\mathcal{P}_n = \{P \in \mathcal{P} \mid \text{symbolin } P \text{ paikkaluku on } n \geq 0\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F} = \bigcup_{n>0} \mathcal{F}_n \text{ ja } \mathcal{P} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{P}_n.$$

- Vakiosymbolien joukko $\mathcal{C}$ voitaisiin vaihtoehtoisesti määritellä 0-paikkaisten funktiosymbolien joukkona $\mathcal{F}_0$.
- Joukon $\mathcal{P}_0$ symbolit vastaavat lauselogiikan atomisia lauseita.

2. KIELEN MÄÄRITELMÄ

► Predikaattilogiikan kielen $\mathcal{L}$ määritelmä on kolmitasoinen.

Määritelmä 9.3 (Termit)

1. Jokainen muuttujasymboli $v \in \mathcal{V}$ on *termi*.
2. Jokainen vakiosymboli $c \in \mathcal{C}$ on *termi*.
3. Jos $f \in \mathcal{F}_n$ on n -paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä, niin myös $f(t_1, \dots, t_n)$ on *termi*.
4. Muita termejä ei ole.

Esimerkki 9.4 $x, c, f(x), f(f(f(f(f(x))))), g(f(x), g(f(x), g(x, c)))$.

Määritelmä 9.5 *Muuttujattomassa termissä* ei esiinny muuttujia.

Kaavat

Määritelmä 9.8

1. Jokainen atomikaava ϕ on *kaava*.
2. Jos ϕ ja ψ ovat kaavoja ja x on muuttuja, niin myös $(\neg\phi), (\phi \vee \psi), (\phi \wedge \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi), (\forall x\phi), (\exists x\phi)$ ovat *kaavoja*.
3. Muita kaavoja ei ole.

Esimerkki 9.9 Predikaattilogiikan kaavoja ovat esim.

$$P(c), (\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, x))) \text{ ja } (\forall x(P(x) \vee (\exists y Q(x, y)))).$$

Huomio Jokainen predikaattilogiikan *kieli* $\mathcal{L}$ on tiettyihin symbolijoukkoihin $\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}$ ja $\mathcal{P}$ perustuva kaavojen joukko!

Atomikaavat

Määritelmä 9.6

1. Jos t_0 ja t_1 ovat termejä, niin $t_0 = t_1$ on *atomikaava*.
2. Jos $P \in \mathcal{P}_0$ on 0-paikkainen predikaattisymboli, niin P on *atomikaava*.
3. Jos $P \in \mathcal{P}_n$ on n -paikkainen predikaattisymboli (missä $n > 0$) ja $t_1, \dots, t_n$ ovat termejä, niin $P(t_1, \dots, t_n)$ on *atomikaava*.
4. Muita atomikaavoja ei ole.

Esimerkki 9.7 Atomikaavoja ovat mm.

$$P(x), \quad Q, \quad x = y, \quad g(x, y) = f(f(c_1)), \\ R(c, x, y) \text{ ja } S(x, c, f(x), h(f(x), c, x), y, c, z).$$

Kaavojen jäsentäminen

- Konnektiivien *presedenssiluokat* ovat seuraavat:
1. $\neg, \forall x$ ja $\exists x$ (missä $x \in \mathcal{V}$) ovat vahvimmat konnektiivit.
 2. $\vee$ ja $\wedge$ ovat näitä heikompia, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.
 3. $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit.
- Predikaattilogiikan kaavoilla on yksikäsitteinen *jäsennyspuu* (poislukien ketjukonjunktoiden ja -disjunktoiden tapaus).
- Kaavan *muodon* määrää jäsennyspuun juuressa oleva konnektiivi.

Esimerkki 9.11 Sulkeiden käyttöön liittyvillä sopimuksilla kaava

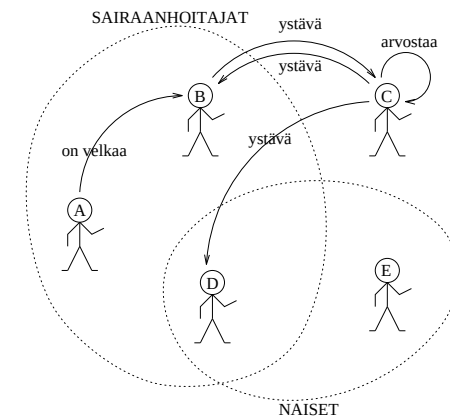
$$(\exists x(\forall y((\exists z(P(x, z) \wedge P(z, y))) \rightarrow ((Q(x) \vee Q(y)) \vee R(x, y))))))$$

voidaan kirjoittaa $\exists x \forall y (\exists z (P(x, z) \wedge P(z, y)) \rightarrow Q(x) \vee Q(y) \vee R(x, y))$.

3. KAAVOJEN MUODOSTAMINEN

- Tunnistetaan kuvattavaan järjestelmään liittyvät objektit:
 - Otetaan käyttöön vakiosymboli jokaiselle objektille, johon on tarve viitata erikseen, eli *nimetään* tarvittavat objektit.
 - Mikäli objektien välillä on *funktionaalisia riippuvuuksia*, otetaan käyttöön vastaavat funktiosymbolit.
- Tutkitaan millaisia *relaatioita* objektien välillä on ja otetaan käyttöön näitä vastaavat predikaattisymbolit.
- Kuvataan relaatiot ja niiden väliset riippuvuudet kirjoittamalla niille *määritelmät* predikaattilogiikan kaavoina.

Esimerkki 9.14



$$\exists x \exists y (Y(x, y) \wedge Y(y, x))$$

$$\exists x \exists y (S(x) \wedge S(y) \wedge V(x, y))$$

$$\exists x A(x, x) \wedge \exists x (S(x) \wedge N(x))$$

$$\neg \forall x (S(x) \rightarrow N(x))$$

$$\forall x (Y(x, c) \rightarrow V(a, x))$$

Objektien välisten suhteiden kuvaaminen

Esimerkki 9.13 Kuvataan esinejoukkoa seuraavin symbolein:

t = "tuoli",

h = "hattu",

s = "sateenvarjo" ja

$P(x, y)$ = "esine x on esineen y päällä".

Tulkitaan seuraavat väittämät luonnolliselle kielelle:

$\neg P(s, t)$: Sateenvarjo ei ole tuolin päällä.

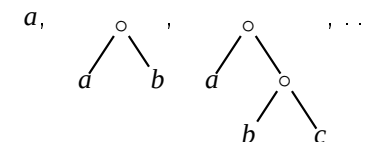
$\exists x P(x, h)$: Hatun päällä on jotakin.

$\exists x \forall y \neg P(y, x)$: Jonkin päällä ei ole mitään.

$\forall x (P(x, h) \rightarrow P(x, t))$: Kaikki hatun päällä oleva on tuolin päällä.

Induktiivisten tietorakenteiden esittäminen

- Luonnolliset luvut: vakiosymboli 0 ja funktiosymboli $s \in \mathcal{F}_1$.
 - Termit* $0, s(0), s(s(0)), \dots$ vastaavat luonnollisia lukuja $0, 1, 2, \dots$
- Listat: vakiosymboli e (tyhjä lista) ja funktiosymboli $c \in \mathcal{F}_2$.
 - Termit* $e, c(a, e), c(a, c(b, e)), \dots$ vastaavat listoja $[], [a], [a, b], \dots$
- Binääripuut: funktiosymbolit $l \in \mathcal{F}_1$ (lehdet) ja $t \in \mathcal{F}_2$ (sisäsolmut).
 - Termit* $l(a), t(l(a), l(b)), t(l(a), t(l(b), l(c))), \dots$ vastaavat puita





4. KVANTTOREIHIN LIITTYVIÄ MÄÄRITELMIÄ

Määritelmä 9.16 Kaavan *alikaavat* määräytyvät seuraavasti:

1. Atomisen kaavan ψ ainoa alikaava on ψ itse.
2. Kaavan $\neg\psi$ alikaavoja ovat $\neg\psi$ sekä kaavan ψ alikaavat.
3. Kaavan $\exists x\psi$ ($\forall x\psi$) alikaavoja ovat $\exists x\psi$ ($\forall x\psi$) sekä kaavan ψ alikaavat.
4. Kaavan $(\alpha * \beta)$, missä $*$ on jokin konnektiiveista $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$, alikaavoja ovat $(\alpha * \beta)$ sekä kaavojen α ja β alikaavat.

Määritelmä 9.18 Olkoot $\exists x\psi$ ja $\forall x\phi$ predikaattilogiikan kaavoja.

1. Kvanttorin $\forall x$ *vaikutusalue* kaavassa $\forall x\psi$ on alikaava ψ .
2. Kvanttorin $\exists x$ *vaikutusalue* kaavassa $\exists x\psi$ on alikaava ψ .

Termin sijoittaminen kaavaan

Määritelmä 9.24 Olkoon $\phi(x)$ kaava ja t termi.

1. Kaavalla $\phi(t)$ tarkoitetaan kaavaa $\phi(x)$, jossa jokainen muuttujan x vapaa esiintymä kaavassa $\phi(x)$ on korvattu termillä t .
2. Termi t on *sijoitettavissa* kaavaan $\phi(x)$, jos termin t kaikki muuttujaesiintymät säilyvät vapaina kaavassa $\phi(t)$.

Esimerkki 9.25 Olkoon $\phi(y) = \exists x(P(x,y) \vee Q(y,x))$.

1. Sijoittamalla *muuttujattomat termit* c ja $f(f(d))$ kaavaan $\phi(y)$ saadaan $\phi(c) = \exists x(P(x,c) \vee Q(c,x))$ ja $\phi(f(f(d))) = \exists x(P(x, f(f(d))) \vee Q(f(f(d)), x))$.
2. Termi $f(x)$ ei ole sijoitettavissa kaavaan $\phi(y)$.



Sidotut ja vapaat muuttujaesiintymät

- Kvanttorisymbolin yhteydessä esiintyvä muuttuja x on *sidottu*.
- Kvanttorin $\forall x$ (vastaavasti $\exists x$) vaikutusalueessa oleva muuttujan x esiintymä on *sidottu*.
- Jos muuttujan x esiintymä ei ole sidottu, niin se on *vapaa*.

Esimerkki 9.20 Tarkastellaan muuttujaesiintymiä kaavassa

$$\underbrace{\forall x}_{\text{sid.}} (\underbrace{P}_{\text{sid.}}(\underbrace{x}_{\text{vap.}}, \underbrace{y}_{\text{vap.}}, \underbrace{z}_{\text{vap.}}) \vee \underbrace{\exists y}_{\text{sid.}} (\underbrace{Q}_{\text{sid.}}(\underbrace{y}_{\text{vap.}}) \rightarrow \underbrace{R}_{\text{sid.}}(\underbrace{x}_{\text{vap.}}, \underbrace{z}_{\text{vap.}})))$$

Määritelmä 9.22 Predikaattilogiikan kielen $\mathcal{L}$ kaavat, joissa ei ole vapaita muuttujaesiintymiä, ovat *lauseita*.

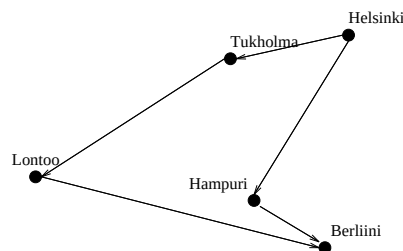
5. STRUKTUURIT

- Totuusjaketut korvataan predikaattilogiikassa struktuureilla.
- Struktuuri ymmärretään edelleen yhden *asiaintilan* kuvauksena.

Määritelmä 10.1 *Struktuuri* (rakenne) $\mathcal{S}$ kielelle $\mathcal{L}$ koostuu universumista U sekä symbolien tulkinnoista universumin suhteen:

1. Vakiosymbolin $c \in \mathcal{C}$ tulkintana on jokin universumin alkio $c^{\mathcal{S}} \in U$.
2. Muuttujasymbolin $v \in \mathcal{V}$ tulkintana on jokin universumin alkio $v^{\mathcal{S}} \in U$.
3. Funktiosymbolin $f \in \mathcal{F}_n$ tulkintana on jokin funktio $f^{\mathcal{S}}: U^n \rightarrow U$.
4. Predikaattisymbolin $P \in \mathcal{P}_n$ tulkintana on jokin relaatio $P^{\mathcal{S}} \subseteq U^n$.

Esimerkki 10.2



$U = \{he, tu, ha, be, lo\}$ $helsinki^S = he$ $tukholma^S = tu$
 $hampuri^S = ha$ $berliini^S = be$ $lontoo^S = lo$
 $Pääkaupunki^S = \{he, tu, be, lo\} \subseteq U^1 = U$ ja
 $Lento^S = \{\langle he, tu \rangle, \langle tu, lo \rangle, \langle lo, be \rangle, \langle he, ha \rangle, \langle ha, be \rangle\} \subseteq U^2$.

Atomikaavojen totuusarvot

- Merkintä $S \models \phi$ (vastaavasti $S \not\models \phi$) tarkoittaa, että kaava $\phi \in \mathcal{L}$ on *tosi* (vastaavasti *epätosi*) struktuurissa S .

Määritelmä 10.7 Olkoon S struktuuri ja U struktuurin S universumi, $n > 0$ ja $t_0, t_1, \dots, t_n$ mitä tahansa termejä.

1. $S \models t_0 = t_1 \iff t_0^S = t_1^S$,
2. $S \models P \iff \langle \rangle \in P^S$, missä $P \in \mathcal{P}_0$, ja
3. $S \models P(t_1, \dots, t_n) \iff \langle t_1, \dots, t_n \rangle^S = \langle t_1^S, \dots, t_n^S \rangle \in P^S$, missä $P \in \mathcal{P}_n$.

6. TOTUUSMÄÄRITELMÄ

- Kielen $\mathcal{L}$ syntaktiset rakenteet tulkitaan kolmella eri tasolla: ensin *termit*, sitten *atomikaavat* ja lopuksi *kaavat*.
- Kielen $\mathcal{L}$ termit ovat viittauksia universumin U alkioihin.

Määritelmä 10.5 Olkoon S struktuuri ja U struktuurin S universumi.

1. Vakio $c \in \mathcal{C}$ *nimeää* universumin U alkion c^S .
2. Muuttuja $v \in \mathcal{V}$ *nimeää* universumin U alkion v^S .
3. Jos termit $t_1, \dots, t_n$ nimeävät universumin U alkiot $t_1^S, \dots, t_n^S$ ja $f \in \mathcal{F}_n$, niin termi $f(t_1, \dots, t_n)$ *nimeää* universumin U alkion $f^S(t_1^S, \dots, t_n^S)$.

Kaavojen totuusarvot

Määritelmä 10.9 Olkoon S struktuuri ja U struktuurin S universumi. Kaikille kaavoille $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ ja kaikille muuttujille $v \in \mathcal{V}$:

1. $S \models \neg \alpha \iff S \not\models \alpha$.
2. $S \models \alpha \wedge \beta \iff S \models \alpha$ ja $S \models \beta$.
3. $S \models \alpha \vee \beta \iff S \models \alpha$ tai $S \models \beta$.
4. $S \models \alpha \rightarrow \beta \iff S \not\models \alpha$ tai $S \models \beta$.
5. $S \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $S \models \alpha$ ja $S \models \beta$, tai $S \not\models \alpha$ ja $S \not\models \beta$.
6. $S \models \exists v \alpha(v) \iff S[v \mapsto a] \models \alpha(v)$ *jollekin* alkioille $a \in U$.
7. $S \models \forall v \alpha(v) \iff S[v \mapsto a] \models \alpha(v)$ *kaikille* alkioille $a \in U$.

Esimerkki

Opisk		KoOhj	
3310D	taina	4358E	tieto
4820H	otso	3310D	sähkö
9055Z	elsi	9055Z	kemia
4358E	uljas	4820H	rakennus
...	...	...	...

Kyselyn $\exists x(\text{Opisk}(x, \text{elsi}) \wedge \text{KoOhj}(x, \text{kemia}))$ totuusarvo on tosi, koska

$$\mathcal{S}[x \mapsto 9055Z] \models \text{Opisk}(x, \text{elsi}) \wedge \text{KoOhj}(x, \text{kemia}).$$

TAVOITTEET

- Osaat tulkita predikaattilogiikan kaavoja luonnolliselle kielelle, kun symbolien merkitykset on annettu.
- Osaat laatia yksinkertaisia määritelmiä predikaattilogiikan lauseilla (symbolien valinta ja korrektiin syntaksin noudattaminen).
- Osaat muodostaa struktuureja asiointilojen kuvauksina.
- Osaat laskea mielivaltaisen lauseen totuusarvon, kun kielen symbolien tulkinnat (struktuuri) on annettu.

Totuusmääritelmän seurauksia

- Jos $\mathcal{S}$ on struktuuri, niin kaikille *kaavoille* $\phi \in \mathcal{L}$ pätee joko $\mathcal{S} \models \phi$ tai $\mathcal{S} \not\models \phi$.
- *Lauseen* $\phi \in \mathcal{L}$ totuusarvo ei riipu muuttujien tulkinnoista.
- Tyypillisesti predikaattilogiikan kuvauksissa käytetään lauseita.
- Jos $\phi(v_1, \dots, v_n)$ on kaava, jossa muuttujat $v_1, \dots, v_n$ esiintyvät vapaina, se voidaan tulkita relaatioksi $\phi(v_1, \dots, v_n)^{\mathcal{S}} = \{ \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in U^n \mid \mathcal{S}[v_1 \mapsto a_1, \dots, v_n \mapsto a_n] \models \phi(v_1, \dots, v_n) \}$.

Esimerkki Kaavan $\text{Lento}(\text{helsinki}, x)$, jossa x on vapaa, tulkinnaksi saadaan $\{tu, ha\}$ kuvan 10.1 mukaisessa asiointilassa.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Olkoon annettuna n -alkioinen universumi U ja m -paikkainen predikaattisymboli $P \in \mathcal{P}_m$.

- Kuinka monta erilaista tulkintaa symbolille P voidaan antaa?
- Kirjoita predikaatille P jokaista mahdollista tulkintaa vastaava määritelmä tapauksessa $n = 1$ ja $m = 2$.