

Luento 5: Normaalimuodot ja resoluutio

1. Lauselogiikan normaalimuodot
2. Muunnokset normaalimuotoihin
3. Normaalimuotojen sieventäminen
4. Lauseiden klausuulimuoto
5. Resoluutiotodistukset
6. Virheettömyys ja täydellisyys

Normaalimuodot

Esimerkki 6.3 Tarkastellaan seuraavia lauseita:

$$\text{KNM:} \quad (A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_3) \wedge (A_5 \vee A_6 \vee A_7)$$

$$\text{KNM \& DNM:} \quad A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$$

$$\text{DNM:} \quad (\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_3 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$$

Määritelmä 6.4 Lause $\beta \in \mathcal{L}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ konjunkttiivinen (disjunkttiivinen) normaalimuoto, jos ja vain jos β on konjunkttiivisessa (disjunkttiivisessa) normaalimuodossa ja $\beta \equiv \alpha$.

Esimerkki 6.5 Lause $A \vee (\neg B \wedge C)$ on loogisesti ekvivalentti konjunkttiivisen normaalimuodon $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$ kanssa.

Väite 6.7 Jokaiselle lauselogiikan lauseelle on olemassa KNM ja DNM.

1. LAUSELOGIIKAN NORMAALIMUODOT

- Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- *Positiivisen* literaalin A *komplementti* $\bar{A} = \neg A$ ja *negatiivisen* literaalin $\neg A$ *komplementti* $\overline{\neg A} = A$.

Määritelmä 6.2 (Normaalimuotojen rakenne)

Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *konjunkttiivisessa* normaalimuodossa, jos ja vain jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_n$, missä jokainen konjunktio β_i on literaaleista $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_{m_i}$.

Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *disjunkttiivisessa* normaalimuodossa, jos ja vain jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_n$, missä jokainen disjunktio β_i on literaaleista $l_1, l_2, \dots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \dots \wedge l_{m_i}$.

2. MUUNNOKSET NORMAALIMUOTOIHIN

Lauseen disjunkttiivinen/konjunkttiivinen normaalimuoto voidaan hakea erityisten muunnossääntöjen avulla seuraavien vaiheiden mukaisesti:

1. Poistetaan ekvivalenssit ($\leftrightarrow$).
2. Poistetaan implikaatiot ($\rightarrow$).
3. Siirretään negatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen.
4. Järjestetään konjunktiot disjunktoiden ulkopuolelle (KNM) tai disjunktiot konjunktoiden ulkopuolelle (DNM).

Huomio Seuraavaksi esitettävät muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin, joten lopputuloksena saadaan lauseelle konjunkttiivinen tai disjunkttiivinen normaalimuoto.

Muunnossäännöt

$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightsquigarrow (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \quad (6.1)$$

$$\alpha \leftrightarrow \beta \rightsquigarrow (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \alpha) \quad (6.2)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \beta \quad (6.3)$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \wedge \neg \beta \quad (6.4)$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightsquigarrow \neg \alpha \vee \neg \beta \quad (6.5)$$

$$\neg \neg \alpha \rightsquigarrow \alpha \quad (6.6)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad (6.7)$$

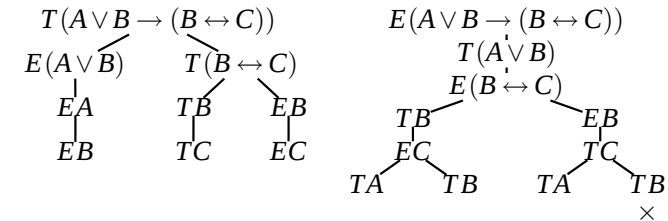
$$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma \rightsquigarrow (\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \quad (6.8)$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \rightsquigarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \quad (6.9)$$

$$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma \rightsquigarrow (\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma) \quad (6.10)$$

Normaalimuotojen hakeminen taulumenetelmällä

- Lauseen α DNM saadaan juurisolmista $T\alpha$ muodostetun valmiin semanttisen taulun ristiriidattomista poluista.
- Lauseen α KNM saadaan lauseen $\neg \alpha$ disjunktiivisesta normaalimuodosta De Morganin sääntöjen avulla.



$$\alpha \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$$

$$\alpha \equiv \neg \neg \alpha \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$$

Esimerkki

Haetaan lauseen $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ normaalimuodot.

$$\rightsquigarrow A \vee B \rightarrow (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B) \quad (6.1)$$

$$\rightsquigarrow \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (6.3)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)) \quad (6.4)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)))$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)))$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B).$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) \quad (6.9)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B) \quad (6.10)$$

$$\rightsquigarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B). \quad (6.10)$$

3. NORMAALIMUOTOJEN SIEVENTÄMINEN

Normaalimuotoja voidaan sieventää mm. seuraavilla periaatteilla:

1. Poistetaan literaalien disjunktioista/konjunktioista literaalien moninkertaiset esiintymät (litteraalit mainitaan vain kertaalleen).
2. Poistetaan literaalien disjunktioita/konjunktioita, joissa esiintyy jokin litteraali l ja sen komplementti $\bar{l}$ ja jotka ovat siten tosia/epätosia.
3. Jos **konjunkttiivisessa** normaalimuodossa esiintyy disjunktio $l_1 \vee \dots \vee l_n$ ja $k_1 \vee \dots \vee k_m$, joille $\{l_1, \dots, l_n\} \subseteq \{k_1, \dots, k_m\}$, poistetaan jälkimmäinen.
4. Jos **konjunkttiivisessa** normaalimuodossa esiintyy yksiliteraalinen disjunktio l , poistetaan muut disjunktioita, joissa l esiintyy, sekä komplementtiliteraalien $\bar{l}$ esiintymät muista disjunktioista.

4. LAUSEIDEN KLAUSUULIMUOTO

- Literaalien $l_1, \dots, l_n$ disjunktio $l_1 \vee \dots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit esitetään usein literaalien *joukkoina* $\{l_1, \dots, l_n\}$, jolloin tyhjä klausuuli $\emptyset$ (merkintä $\square$) vastaa tyhjää disjunktia $\perp$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuulinsa konjunktia.
- Tyhjä klausuulijoukko $\emptyset$ edustaa tyhjää konjunktia $\top$.
- Mistä tahansa konjunktivisessa normaalimuodossa olevasta lauseesta ϕ voidaan muodostaa klausuulijoukko S_ϕ .

Esimerkki 7.2 Konjunktivista normaalimuotoa $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C, D\}\}$.

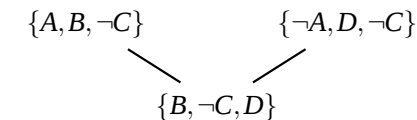
5. RESOLUUTIODISTUKSET

Määritelmä 7.9 Olkoot $C_1 = \{l, l_1, \dots, l_n\}$ ja $C_2 = \{\bar{l}, l'_1, \dots, l'_m\}$ kaksi klausuulia. Klausuuli

$$C = (C_1 \cup C_2) \setminus \{l, \bar{l}\} = \{l_1, \dots, l_n, l'_1, \dots, l'_m\}$$

on klausuulien C_1 ja C_2 *yhdistelmä*.

Esimerkki 7.10 Sovelletaan resoluutiosääntöä seuraaviin klausuuleihin:



Sääntöä sovellettiin yllä literaalien A ja $\neg A$ suhteen. Joukkoesityksessä $\neg C$ esiintyy yhdistelmässä $\{B, \neg C, D\}$ vain kertaalleen. ■

Totuusmääritelmä ja toteutuvuus klausuuleille

Totuusjakelun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ *literaaliesitys* on $\text{Lit}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\neg A \mid A \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}\}$.

Määritelmä 7.3 Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ mikä tahansa totuusjakelu.

1. Klausuulille C : $\mathcal{A} \models C$, jos ja vain jos $C \cap \text{Lit}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.
2. Klausuulijoukolle S : $\mathcal{A} \models S$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C$ kaikille $C \in S$.
3. Totuusjakelu $\mathcal{A}$ on klausuulijoukon S *malli*, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models S$.

- Klausuulijoukko S on *toteutuva*, jos ja vain jos joukolla S on ainakin yksi malli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.
- Muussa tapauksessa S on *toteutumaton*.

Resoluutiodistukset

Lähtökohtana klausuulijoukko S johon sovelletaan resoluutiosääntöä.

Määritelmä 7.12 Klausuulin C *johto* joukosta S on äärellinen jono klausuuleja $C_1, \dots, C_n$, missä $C_n = C$ ja jokaiselle klausuulille C_i joko

1. $C_i \in S$ tai
2. C_i on joidenkin sitä edeltävien klausuulien C_j ja C_k yhdistelmä.

Määritelmä 7.13 Jos klausuulijoukosta S voidaan johtaa tyhjä klausuuli $\square$, kyseistä johtoa kutsutaan joukon S *kumoamiseksi*.

- Intuition on, että mahdollisuus klausuulijoukon S toteutumiseen (kaikki klausuulit tosia samassa totuusjakelussa) kumoutuu.
- Resoluutiodistukselle voidaan muodostaa myös puuesitys.

Esimerkki kumoamisesta

Esimerkki 7.15 Klausuulijoukolle

$$S = \{\{A, B, \neg C, \neg D\}, \{\neg A, E\}, \{\neg B, \neg F\}, \{C, E\}, \{D, \neg F\}, \{\neg E\}, \{F\}\}$$

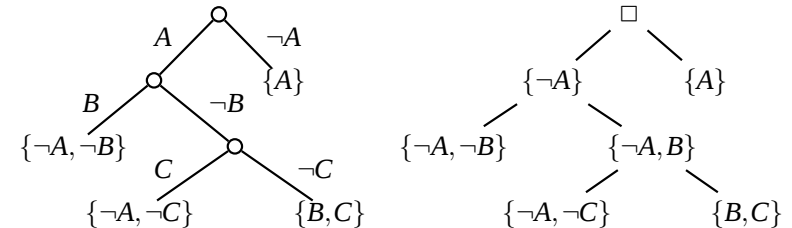
saadaan seuraavanlainen kumoaminen:

1. $\{A, B, \neg C, \neg D\}$	S	8. $\{D, \neg F\}$	S
2. $\{\neg A, E\}$	S	9. $\{E, \neg F\}$	7, 8
3. $\{E, B, \neg C, \neg D\}$	1, 2	10. $\{\neg E\}$	S
4. $\{\neg B, \neg F\}$	S	11. $\{\neg F\}$	9, 10
5. $\{E, \neg F, \neg C, \neg D\}$	3, 4	12. $\{F\}$	S
6. $\{C, E\}$	S	13. $\square$	11, 12
7. $\{E, \neg F, \neg D\}$	5, 6		■

Puukonstruktio täydellisyystodistusta varten

Laaditaan tapausanalyysiä kuvaava binääripuu klausuulijoukolle

$$S = \{\{A\}, \{B, C\}, \{\neg A, \neg B\}, \{\neg A, \neg C\}\}$$



Huomio Kuhunkin lehtisolmuun s merkitty klausuuli C on epätosi totuusjakeleissa $\mathcal{A}$, joille polulla olevien literaalien joukko $L_s \subseteq \text{Lit}(\mathcal{A})$.

6. VIRHEETTÖMYYS JA TÄYDELLISYYS

Väite 7.16 Jos totuusjakele $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on klausuulijoukon S malli ja C on kahden klausuulin $C_1 \in S$ ja $C_2 \in S$ yhdistelmä, niin $\mathcal{A} \models S \cup \{C\}$.

Teoreema 7.17

Jos klausuulijoukko S kumoutuu, niin S on toteutumaton.

Todistus. Oletetaan, että klausuulijoukolle S on todistus $C_1, \dots, C_n$, missä $C_n = \square$. Tehdään vastaoletus, että S on toteutuva. Osoitetaan induktiolla i :n suhteen, että $S \cup \{C_1, \dots, C_i\}$ on toteutuva (ristiriita).

Induktioaskel: $S \cup \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ on toteutuva (induktio-oletus).

1. Jos $C_i \in S$, joukko $S \cup \{C_1, \dots, C_i\}$ on triviaalisti toteutuva.
2. Muutoin C_i on saatu resoluutiosäännöllä joukon $\{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ klausuuleista, joten $S \cup \{C_1, \dots, C_i\}$ on toteutuva (väite 7.16). $\square$

Resoluution täydellisyystodistus

Väite 7.20 Jos klausuulijoukko S on toteutumaton, niin määritelmän 7.18 mukaisen binääripuun jokainen polku päättyy solmuun s , johon on merkitty jokin klausuuli $C \in S$ siten, että $\overline{C} \subseteq L_s$.

Teoreema 7.21 Jos klausuulijoukko S on toteutumaton, se on kumottavissa.

Todistus. Olkoon S toteutumaton, jolloin binääripuun lehtisolmuina on S :n klausuulit. Käydään läpi sisäsolmut s (käänteisessä järjestyksessä).

Merkitään solmuun s klausuuliksi lapsisolmuihin merkittyjen klausuulien C_v ja C_o yhdistelmä C , jolle pätee $\overline{C} \subseteq L_s$ ($\overline{C_v} \subseteq L_{s_v}$ ja $\overline{C_o} \subseteq L_{s_o}$). Tämä ominaisuus siirtyy kaikille sisäsolmujen s klausuuleille.

Juurisolmun s tapauksessa $L_s = \emptyset$, joten $\overline{C} = \emptyset$ ja $C = \square$.



TAVOITTEET

- Osaat hakea sekä konjunkttiivisen että disjunkttiivisen normaalimuodon mille tahansa lauselogiikan lauseelle.
- Osaat muodostaa konjunkttiivisesta normaalimuodosta lauseen klausuuliesityksen ja laskea sen totuusarvon eri totuusjakuissa.
- Tunnet resoluutiosäännön ja osaat johtaa sen avulla uusia klausuuleja annetusta klausuulijoukosta.
- Tiedät, että resoluutio (kumoamismenettely) antaa virheettömän ja täydellisen menetelmän klausuulijoukon toteutumattomuuden tutkimiseen.



PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastele resoluution täydellisyytodistuksen yhteydessä laadittua binääripuuta esim. klausuulijoukolle

$$\{ \{A, B, C\}, \{A, \neg B, C\}, \{\neg A, B, C\}, \{\neg A, \neg B, C\}, \\ \{A, B, \neg C\}, \{A, \neg B, \neg C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\} \}.$$

- Mieti miten resoluutioaskelien tekeminen joukon S klausuuleille vaikuttaa kyseisen puun kokoon (klausuulit lisään joukkoon S)?
- Onko atomien käsittelyjärjestyksellä vaikutusta joukon S tapauksessa ja yleisesti ottaen?