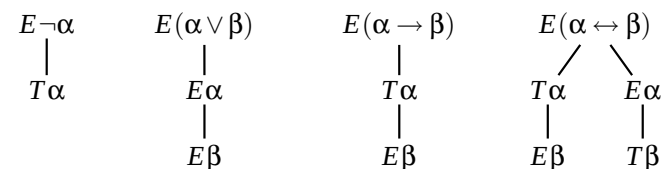
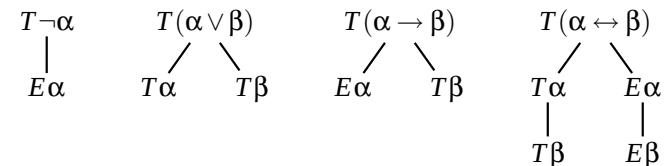


Luento 3: Semanttiset taulut

Sisältö

1. Konnektiivikohtaiset taulusäännöt
2. Semanttisen taulun määritelmä
3. Taulumenetelmän ominaisuuksia
4. Päättely semanttisilla tauluilla

Muiden peruskonnektiivien taulusäännöt

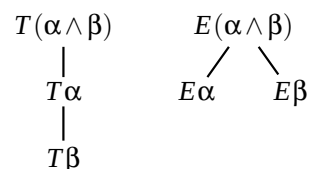


Ajatuksena on, että jokaiselle juurisolmusta lehtisolmuun johtavalle *polulle* kirjatut totuusarvovaatimukset ovat yhtäaikaan voimassa.

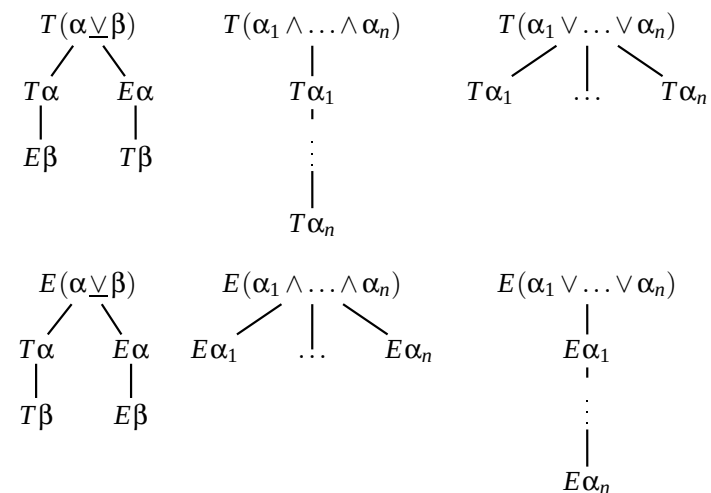
1. KONNEKTIIVIKOHTAISET TAULUSÄÄNNÖT

- Totuustaulukkoja käytetään lauseen ϕ totuusarvon laskemiseen, kun annettuna on atomisten lauseiden $A \in \text{At}(\phi)$ totuusarvot.
- Semanttisissa tauluissa idea on käänteinen: määrätään lauseen ϕ alilauseiden totuusarvoja lähtien liikkeelle lauseen ϕ totuusarvosta.
- Verrataan konjunktion totuustaulukkoa ja taulusääntöjä:

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E



Muita taulusääntöjä



Taulusäännön instantiointi

- Lausemuodon tunnistaminen on jatkossa olennaista, koska taulusäännön valinta suoritetaan tällä perusteella.

Esimerkki 4.1 Tarkastellaan lausetta $(\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B$:

Lause on muodoltaan implikaatio $\alpha \rightarrow \beta$, missä ehtona on lause $\alpha = \neg A \rightarrow C \vee D$ ja seurauksena lause $\beta = A \vee B$.

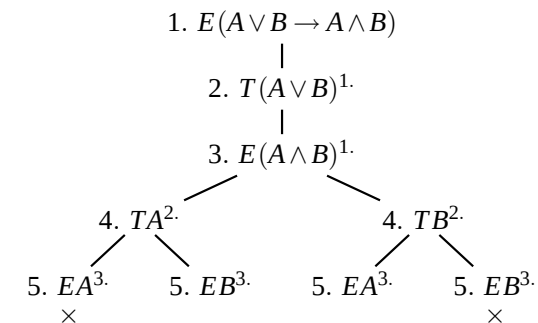
Korvataan α ja β kyseisillä lauseilla implikaation säännössä:

$$\begin{array}{c} T(\alpha \rightarrow \beta) \\ \swarrow \quad \searrow \\ E\alpha \quad T\beta \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} T((\neg A \rightarrow C \vee D) \rightarrow A \vee B) \\ \swarrow \quad \searrow \\ E(\neg A \rightarrow C \vee D) \quad T(A \vee B) \end{array}$$

Esimerkki

- Solmut voidaan numeroida luettavuuden parantamiseksi.
- Tällöin poluille lisättävät solmut numeroidaan juoksevasti.

Esimerkki 4.3 Muodostetaan taulu juurisolmusta $E(A \vee B \rightarrow A \wedge B)$:



2. SEMANTTISEN TAULUN MÄÄRITELMÄ

Määritelmä 4.2 *Semanttinen taulu* muodostetaan seuraavasti:

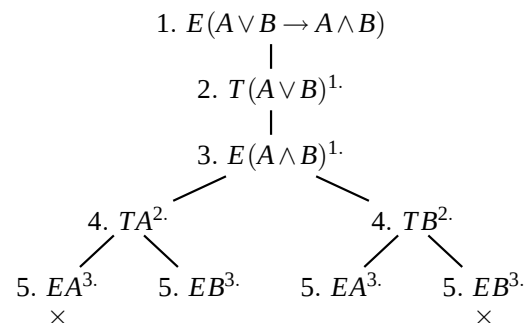
- Jokainen *yksisolmuinen puu*, jonka ainoana solmuna on juurisolmu $T\phi$ tai $E\phi$, on semanttinen taulu.
- Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $T\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ' , joka saadaan liittämällä taulusääntö $T\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myös semanttinen taulu.
- Jos τ on semanttinen taulu, P on jokin taulun τ polku juurisolmusta lehtisolmuun ja $E\phi$ polun P solmu, niin puurakenne τ' , joka saadaan liittämällä taulusääntö $E\phi$ *ilman juurisolmua* polun P jatkoksi, on myös semanttinen taulu.

Polkuja ja tauluja koskevia määritelmiä

- Polun P solmu $T\phi$ ($E\phi$) on *hajotettu* polulla P , joss
 - ϕ on atominen lause, tai
 - solmun $T\phi$ ($E\phi$) taulusäännön jonkun polun P' jokainen solmu on polulla P .
- Polku P on *ristiriitainen*, joss sillä esiintyy solmut $T\alpha$ että $E\alpha$ jollekin lauseelle α (tämän merkiksi kirjoitetaan $\times$ polun loppuun).
- Polku P on *valmis*, joss se on ristiriitainen tai jokainen sen solmuista on hajotettu polulla P .
- Taulu τ on *valmis*, joss jokainen sen poluista on valmis.
- Taulu τ on *ristiriitainen*, joss jokainen sen poluista on ristiriitainen.

Esimerkki

Tarkastellaan edellä muodostettua semanttista taulua:



- Kaikki polut ovat valmiita, mutta vain reunimmaisiet ristiriitaisia.
- Taulu on valmis, muttei ristiriitainen.

Virheettömyys ja täydellisyys

Olkoon $\phi \in \mathcal{L}$ mikä tahansa lause ja τ juurisolmusta $T\phi$ ($E\phi$) muodostettu semanttinen taulu.

Väite 4.13 Jos τ on *valmis* ja sillä on ei-ristiriitainen polku P , *niin* $\mathcal{A} \models P$ ja $\mathcal{A} \models \phi$ (vastaavasti $\mathcal{A} \not\models \phi$) jokaiselle totuusjaketulle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, joka täyttää seuraavat vaatimukset kaikille atomisille lauseille $A \in \mathcal{P}$:

1. Jos TA esiintyy polulla P , niin $A \in \mathcal{A}$.
2. Jos EA esiintyy polulla P , niin $A \notin \mathcal{A}$.

Väite 4.15 Jos $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$) jossain totuusjaketussa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$, *niin* semanttisessa taulussa τ on ei-ristiriitainen polku P siten, että $\mathcal{A} \models P$.

3. TAULUMENETELMÄN OMINAISUUKSIA

Olkoon ϕ atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvan kielen $\mathcal{L}$ lause.

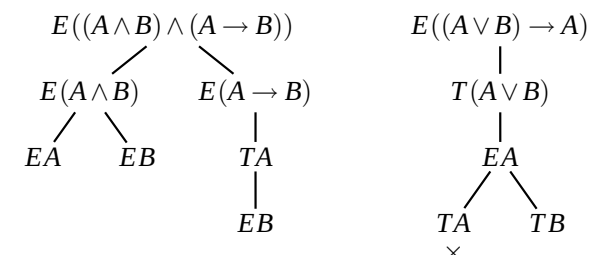
- Semanttiset taulut ratkaisevat seuraavan loogisen ongelman:
Onko olemassa totuusjaketua $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \models \phi$ ($\mathcal{A} \not\models \phi$)?
- Tällaiset totuusjaketut ovat kytköksissä ei-ristiriitaisiin polkuihin.

Määritelmä 4.11 Totuusjaketu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on *yhteensopiva* semanttisen taulun τ polun P kanssa (merkitään $\mathcal{A} \models P$), jos ja vain jos

1. $\mathcal{A} \models \alpha$ jokaiselle polun P solmulle $T\alpha$, ja
 2. $\mathcal{A} \not\models \beta$ jokaiselle polun P solmulle $E\beta$.
- $\Rightarrow$ Yhteensopivuus ristiriitaisen polun kanssa on mahdotonta.

Muutamia havaintoja

- Sama totuusjaketu voi olla yhteensopiva usean ei-ristiriitaisen polun kanssa (vasemmanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{A\}$).
- Yhteensopivia totuusjaketuja voi olla yksi tai useampia.
- Taulusääntöjen soveltaminen *säilyttää* polkujen kanssa yhteensopivat totuusjaketut (oikeanpuolinen taulu; $\mathcal{A} = \{B\}$).



4. PÄÄTTELY SEMANTTISILLA TAULUILLA

- Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on **toteutuva** $\iff$ juurisolmusta $T\phi$ muodostetussa **valmiissa** taulussa on ainakin yksi ei-ristiriitainen polku P .
- Ei-ristiriitaisesta polusta P voidaan eristää malleja $\mathcal{A}$ seuraavasti.
 1. Jos $TA \in P$, niin $A \in \mathcal{A}$.
 2. Jos $EA \in P$, niin $A \notin \mathcal{A}$.
 3. Jos $TA \notin P$ ja $EA \notin P$, niin **valitaan** joko $A \in \mathcal{A}$ tai $A \notin \mathcal{A}$.
- Mallien lukumäärä voi kasvaa eksponentiaalisesti.
- Äärellinen lausejoukko $\Sigma = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq \mathcal{L}$ on toteutuva $\iff$ lause $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n$ on toteutuva (taulun juureen $T\phi_1, \dots, T\phi_n$).

Semanttisten taulujen todistusmenetelmä

Määritelmä 4.22 Taulu τ on lauseen ϕ **todistus**, jos taulun τ juurisolmuna on $E\phi$ ja τ on ristiriitainen (ja siten myös valmis).

- Jos lauseella ϕ on todistus, sitä kutsutaan **teoreemaksi/todistuvaksi** (merkintä $\vdash \phi$).
- Todistusmenetelmä M on
 1. **virheetön**, jos lauseen ϕ todistettavuudesta menetelmällä M ($\vdash_M \phi$) seuraa lauseen ϕ pätevyys ($\models \phi$).
 2. **täydellinen**, jos lauseen ϕ pätevydestä ($\models \phi$) seuraa lauseen todistettavuus menetelmällä M ($\vdash_M \phi$).
- Semanttisten taulujen menetelmä on virheetön ja täydellinen.
- **Johdettavuudelle** lausejoukosta Σ saadaan: $\Sigma \vdash \phi \iff \Sigma \models \phi$.

Loogisten päätelmien tekeminen

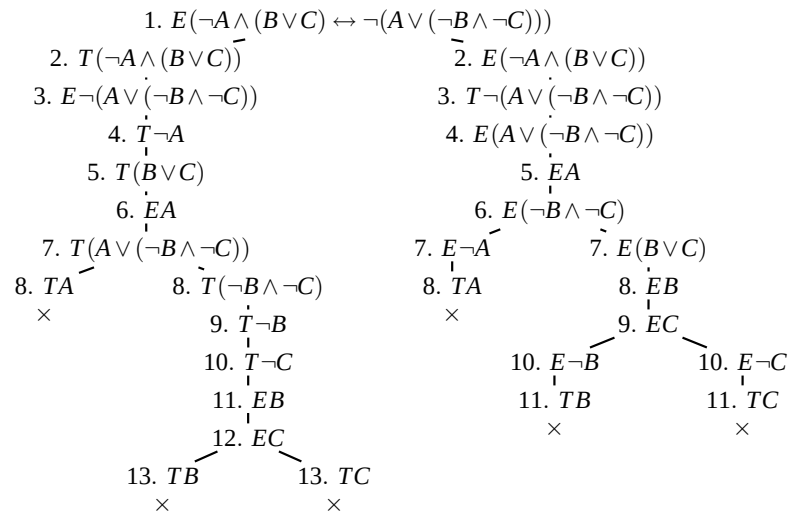
1. Pätevyyden tutkiminen: $\models \phi \iff$ juurisolmusta $E\phi$ muodostettu valmis semanttinen taulu on **ristiriitainen**.
2. Looginen seuraavuus: $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi \iff$ solmuista $T\phi_1, \dots, T\phi_n$ ja $E\phi$ muodostettu valmis taulu on **ristiriitainen**.
3. Loogisen ekvivalenssin tutkiminen: $\phi \equiv \psi \iff$ juurisolmusta $E(\phi \leftrightarrow \psi)$ muodostettu valmis semanttinen taulu on **ristiriitainen**.
4. Äärellisten lausejoukkojen Σ_1 ja Σ_2 ekvivalenssin tarkastaminen:
 - (a) Jokaiselle lauseelle $\sigma_1 \in \Sigma_1$ tulee osoittaa $\Sigma_2 \models \sigma_1$.
 - (b) Jokaiselle lauseelle $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tulee osoittaa $\Sigma_1 \models \sigma_2$.

Huomio Mikäli valmis semanttinen taulu ei ole ristiriitainen, sen ei-ristiriitaisista poluista voidaan muodostaa **vastamalleja**.

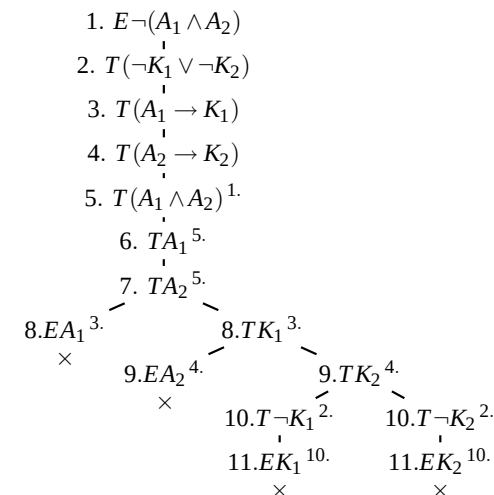
Ohjeita semanttisten taulujen laadintaan:

- Taulun solmussa $T\phi$ (tai $E\phi$) olevan lauseen ϕ rakenne määrää käytettävän taulusäännön: esim. implikaation $\phi = \alpha \rightarrow \beta$ käsittely.
- Polun laajentaminen voidaan lopettaa ristiriidan ilmentymiseen.
- Solmujen hajottamisjärjestys vaikuttaa usein taulun kokoon.
- Taulun koon kasvua kannattaa hillitä seuraavilla periaatteilla:
 1. Hajotetaan ensisijaisesti solmuja, jotka eivät haarauta taulua.
 2. Hajotetaan toissijaisesti jäljelle jääviä solmuja, joista syntyvät totuusarvovaatimukset johtavat (välittömään) ristiriitaan.
 3. Viimeisenä hajotetaan muita (taulua haarauttavia) solmuja.
- Kaikkia lauseita koskevat totuusarvovaatimukset eivät välttämättä ole tarpeen ristiriidan aikaansaamiseen (edes tietyllä polulla)!

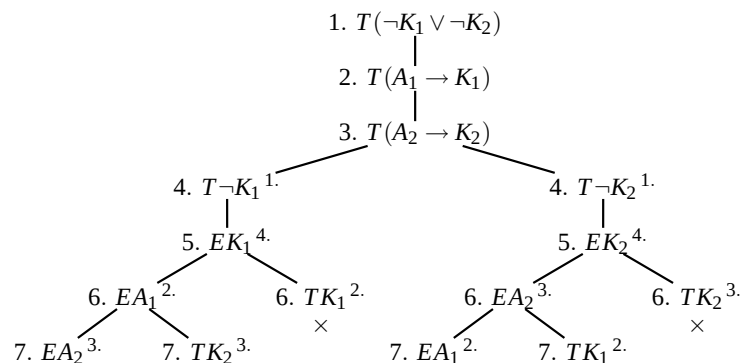
Esimerkki ekvivalenssin osoittamisesta



Loogisen seuraavuuden tutkiminen



Esimerkki mallien hakemisesta



Ei-ristiriitaisista poluista saadaan viisi sallittuja tiloja vastaavaa mallia:

$$\mathcal{A}_1 = \emptyset, \mathcal{A}_2 = \{K_1\}, \mathcal{A}_3 = \{K_1, A_1\}, \mathcal{A}_4 = \{K_2\} \text{ ja } \mathcal{A}_5 = \{K_2, A_2\}.$$

TAVOITTEET

- Osaat muodostaa *valmiin* semanttisen taulun taulusääntöjä soveltamalla, kun juurisolmu(t) on annettu.
- Tunnet joitain periaatteita taulujen koon kasvun hillitsemiseksi.
- Tiedät, miten erilaiset loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa semanttisten taulujen avulla.
- Mikäli valmiiseen semanttiseen tauluun jää ei-ristiriitaisia polkuja, osaat muodostaa vastamallin atomisia lauseita koskevien totuusarvovaatimusten pohjalta.
- Osaat määritellä, mitä todistusmenetelmän virheettömyys ja täydellisyys tarkoittavat.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan lauselogiikan lausetta

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow E) \wedge (E \rightarrow F) \rightarrow (A \rightarrow F).$$

- Osoita lause teoreemaksi semanttisten taulujen menetelmällä.
- Mieti solmujen hajotusjärjestyksen vaikutusta todistuksen kokoon:
 1. Millä tavoin saat aikaan mahdollisimman pienen todistuksen?
 2. Millainen hajotusjärjestys johtaa maksimaaliseen kasvuun?