

Luento 1: Lauselogiikan syntaksi ja semantiikka

Sisältö

1. Lauselogiikan kieli
2. Lauseiden muodostaminen
3. Sopimukset sulkeiden käytöstä
4. Totuustaulukot
5. Konnektiivien määriteltävyys
6. Lauselogiikan totuusmääritelmä

Kielen määritelmä

Määritelmä 1.1 Ei-tyhjään atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvan lauselogiikan kielen $\mathcal{L}$ *lauseet* muodostetaan seuraavasti:

1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on lause.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat lauseita.
3. Ainoastaan kahden edeltävän säännön perusteella muodostetut merkkijonot ovat lauseita.

Esimerkki 1.2 Jos $\mathcal{P} = \{A, B\}$, niin esimerkiksi $A, B, (\neg A), ((\neg A) \vee B)$ ja $((\neg A) \vee B) \rightarrow A$ ovat lauseita, muttei $(\neg())$ eikä $(A \vee C)$. ■

1. LAUSELOGIIKAN KIELI

Lauselogiikan aakkosto koostuu seuraavista symboleista:

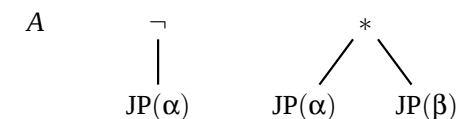
- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \dots, B, B_1, \dots, C, \dots$
- negaationsymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaationsymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: $()$

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Jäsennyspuut

Määritelmä 1.4 Määritellään *jäsennyspuut* lauserakenteen mukaisesti:

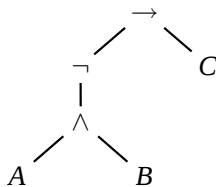
1. Atomisen lauseen $A \in \mathcal{P}$ jäsennyspuu $JP(A)$ on alla vasemmalla.
2. Negaation $(\neg\alpha)$ jäsennyspuu $JP(\neg\alpha)$ on annettu keskellä.
3. Jos $*$ on jokin lauselogiikan *binäärikonnektiiveista*, lauseen $(\alpha * \beta)$ jäsennyspuu $JP(\alpha * \beta)$ on annettu oikealla.



Yllä $JP(\alpha)$ ja $JP(\beta)$ ovat lauseiden α ja β rekursiivisesti määräytyvät jäsennyspuut, jotka sijoitetaan kyseisten jäsennyspuiden *alipuiksi*.

Esimerkki

Lauseen $((\neg(A \wedge B)) \rightarrow C)$ jäsenyspuu on seuraava:



- Lause on muodoltaan *implikaatio* juuren konnektiivin $\rightarrow$ nojalla.
- Vastaavasti voidaan tunnistaa lauseet, jotka ovat *negaatioita*, *konjunktioita*, *disjunktioita* ja *ekvivalensseja*.
- Lauseiden ominaisuuksia voidaan todistaa induktiolla *lauserakenteen suhteen* (tai jäsenyspuiden rakenteen suhteen).

Järjestelmän määrittely

Määritelmä voidaan myös kirjoittaa suoraan lauselogiikalla

1. valitsemalla sopiva joukko järjestelmän ominaisuuksia kuvaavia atomisia lauseita ja
2. määrittelemällä näiden väliset loogiset riippuvuudet lauseilla.

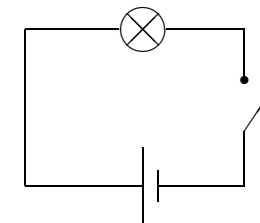
Esimerkki 1.7 Mallinnetaan seuraava järjestelmä lauselogiikalla:

Valitaan atomisiksi lauseiksi:

L = "Lamppu palaa",

K = "Kytin on suljettu" ja

P = "Paristossa on riittävästi varausta".



Määritelmään kirjataan lauseet $((\neg P) \rightarrow (\neg L))$ ja $(P \rightarrow (L \leftrightarrow K))$. ■

2. LAUSEIDEN MUODOSTAMINEN

Jos lähtökohtana on joukko luonnollisen kielen lauseita,

1. tunnistetaan atomiset lauseet eli väittämät, joita ei voida enää loogisessa mielessä pilkkoa osiin ja
2. tunnistetaan konnektiivit ja muodostetaan vastaavat lauseet.

Esimerkki 1.6 Ilmaistaan lauselogiikalla periaate "*Jos tiedosto on liian suuri, niin se tiivistetään tai poistetaan*". Valitaan atomiset lauseet

A = "Tiedosto on liian suuri",

B = "Tiedosto tiivistetään" ja

C = "Tiedosto poistetaan".

Sijoittamalla nämä saadaan alustava lause: Jos A , niin B tai C .

Tunnistetaan konnektiivit: $(A \rightarrow (B \vee C))$. ■

3. SOPIMUKSET SULKEIDEN KÄYTÖSTÄ

- Uloimmat sulkeet on tapana jättää pois: $(A \rightarrow B) \leadsto A \rightarrow B$.
- Konnektiivien *presedenssi* eli *sidontajärjestys* (määritelmä 1.8):
 1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista.
 2. $\vee$ ja $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.
 3. $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit.
 Toisaalta sulkeet on säilytettävä lauseissa $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$.
- Poikkeuksena ketjudisjunktioit/konjunktioit: kirjoitetaan $A \vee B \vee C$ lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

Esimerkki 1.9:

$(\neg A) \rightarrow B \quad \leadsto \quad \neg A \rightarrow B$

$(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C) \quad \leadsto \quad A \wedge B \rightarrow B \vee C$ ■

4. TOTUUSTAULUKOT

- *Perustotuustaulukoilla* (kuva 2.1) määritellään eri lausemuotojen totuusarvot alilauseidensa totuusarvojen funktiona.
- Totuustaulukot on helppo sisäistää muistisääntöjen avulla:
 $\alpha \wedge \beta$ on tosi $\iff \alpha$ on tosi **ja** β on tosi.

α	$(\neg\alpha)$	α	β	$(\alpha \wedge \beta)$	α	β	$(\alpha \vee \beta)$
T	E	T	T	T	T	T	T
T	E	T	E	E	T	E	T
E	T	E	T	E	E	T	T
E	T	E	E	E	E	E	E

Totuustaulukon muodostaminen

Perustotuustaulukoiden avulla voidaan muodostaa totuustaulukko mille tahansa lauseelle $\phi \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukolle $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$).

1. Muodostetaan sarakkeet atomisille lauseille $A \in \text{At}(\phi)$ / $A \in \text{At}(\Sigma)$ ja näille kaikki totuusarvojen yhdistelmät.
2. Lasketaan systemaattisesti kaikkien *alilauseiden* totuusarvot.

Esimerkki 2.2 Lauseen $\neg B \wedge (A \rightarrow B)$ totuustaulukko on seuraava:

A	B	$\neg B$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
T	T	E	T	E
T	E	T	E	E
E	T	E	T	E
E	E	T	T	T

Perustotuustaulukot

- Muiden konnektiivien perustotuustaulukot ovat alla (kuva 2.2).
- Erityisesti $\alpha \rightarrow \beta$ on tosi $\iff \alpha$ on epätosi **tai** β on tosi
 $\iff$ **jos** α on tosi, **niin** β on tosi.
- Implikaatio $\rightarrow$ ei edellytä syy-seuraus-suhdetta!

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$	α	β	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$	α	β	$(\alpha \vee \beta)$
T	T	T	T	T	T	T	T	E
T	E	E	T	E	E	T	E	T
E	T	T	E	T	E	E	T	T
E	E	T	E	E	T	E	E	E

5. KONNEKTIIVIEN MÄÄRITELTÄVYYS

Esimerkki 2.3 Lauseiden $(\alpha \wedge \beta)$ ja $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ totuustaulukon

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
T	T	T	E	E	E	T
T	E	E	E	T	T	E
E	T	E	T	E	T	E
E	E	E	T	T	T	E

perusteella ko. lauseilla on aina samat totuusarvot. ■

$\implies$ Lause $\alpha \wedge \beta$ voidaan (tarvittaessa) määritellä syntaktisena *lyhennysmerkintänä* lauseelle $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Tyypillisiä määritelmiä

Konnektiiveja voidaan määritellä toistensa avulla (taulukko 2.1):

- $(\alpha \wedge \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $(\alpha \vee \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \rightarrow \beta)$ lauseena $(\neg\alpha \vee \beta)$ tai lauseena $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ lauseena $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ tai lauseena $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta))$

⇒ Kaikkia peruskonnektiiveja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ei välttämättä tarvita.

Pohdittavaksi

Tehtävänäsi on suunnitella kyselykieli tietokannan käyttöliittymään:

- Millaisia loogisia operaatioita käyttäisit?
- Kuinka tehokkaasti nämä ovat toteutettavissa?

Esimerkki Teknillisen korkeakoulun kirjaston tietokanta <http://www.otalib.fi/tkk/books/index.html> antaa kyselyihin seuraavat vastaukset:

1. Kysely algorithm: 225 viitettä
2. Kysely algorithm AND genetic: 20 viitettä
3. Kysely algorithm AND NOT genetic: 205 viitettä

Mutta kysely "NOT genetic" antaa 0 viitettä!

Konnektiivien riittävyys

- Tarvittaessa voidaan rajoittaa seuraaviin konnektiiveihin:
 1. $\neg$ ja $\vee$ riittävät toisten ($\wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp$) määrittelemiseen,
 2. $\neg$ ja $\wedge$ riittävät myös,
 3. $\neg$ ja $\rightarrow$ riittävät myös ja
 4. $\perp$ (aina epätosi lause) ja $\rightarrow$ riittävät myös.
- Toisaalta esim. $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ ja $\leftrightarrow$ eivät ole yksinään riittäviä.
- Peircen nuoli $(\alpha \downarrow \beta) \equiv \neg(\alpha \vee \beta)$ ja Shefferin viiva $(\alpha | \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$ riittävät yksinään muiden määrittelemiseen.
- Muitakin *binäärikonnektiiveja* $\alpha * \beta$ on määriteltävissä.

6. LAUSELOGIIKAN TOTUUSMÄÄRITELMÄ

Määritelmä 2.7 *Totuusjaku* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ määrää, mitkä joukon $\mathcal{P}$ lauseista ovat *tosia*, jolloin erotuksen $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ lauseet ovat *epätosia*.

- Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.
- Totuusjaketut ja totuustaulukon rivit vastaavat toisiaan.
- Totuusjaku voidaan ymmärtää yhden *asiantilan* kuvauksena.

Esimerkki 2.8 Lamppuesimerkin tapauksessa esimerkiksi

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.

Lamppu palaa.

Kytin on suljettu.

vaikuttaa fyysisesti mahdottomalta asiantilalta. ■

Induktiivinen määritelmä

Keskeiset merkinnät: $\mathcal{A} \models \phi$ (lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *tosi* totuusjaketelussa $\mathcal{A}$) ja $\mathcal{A} \not\models \phi$ (lause ϕ on *epätosi* totuusjaketelussa $\mathcal{A}$).

Määritelmä 2.9 Kaikille $A \in \mathcal{P}$ ja kaikille lauseille $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$:

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A} \models \neg \alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$, tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

Väite 2.11 Jokaiselle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ ja $\phi \in \mathcal{L}$, joko $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \phi$.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Alla on määritelty konnektiivi "*jos α niin β muutoin γ* ":

α	β	γ	$(\alpha ? \beta : \gamma)$
T	T	T	T
T	T	E	T
T	E	T	E
T	E	E	E
E	T	T	T
E	T	E	E
E	E	T	T
E	E	E	E

Anna tälle määritelmä negaation, konjunktion ja disjunktion avulla.

TAVOITTEET

- Osaat tulkita annetut lauselogiikan lauseet luonnolliselle kielelle, kun atomisten lauseiden merkitykset on annettu.
- Osaat muodostaa syntaksiltaan oikeellisia lauselogiikan lauseita ainakin luonnollisen kielen välityksellä.
- Tunnistat lauseiden muodon eli osaat jäsentää lauseita.
- Tiedät, että loogisten operaatioiden valinnalla on vaikutuksia vastaavan lauselogiikan kielen ilmaisuvoimaan.
- Osaat laskea lauseiden totuusarvoja atomisten lauseiden totuusarvoista lähtien (totuustaulukoilla ja totuusmääritelmällä).